乱流クロージャーモデル

n 個の未知数に対し，独立した n 個の方程式があるとき未知数は求まり，方程式は「完結」しているといいます．説明を簡単にするため，2次元で非粘性・非圧縮・外力無しの流体を考えます．この流体の運動方程式と連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{3}$$

と表せます．非圧縮の仮定より ρ_0 は定数（既知）なので，未知数は流速$(u,\ w)$と圧力 p の3個であり，方程式も3個あるので方程式は完結しています．

ところが，本誌拙文（中西 2009）でも書きましたように，このような方程式はあらゆるスケールの運動を含んでいるので，これを解くのは現実的ではありません．レイノルズは各未知数を，ある平均量とそれからのずれ（乱流量）に分けて考えました．式で書くと

$$u=\overline{u}+u',\quad w=\overline{w}+w',\quad p=\overline{p}+p' \tag{4}$$

で，右辺第1項が平均量，第2項が乱流量です．アメダスのデータのように，我々がまず知りたいのは平均量です．(4)式を(1)〜(3)式に代入したのち，方程式全体を平均すれば平均量の方程式が得られます．今，ある平均操作をアンサンブル平均とし，その性質

$$\overline{\overline{u}}=\overline{u},\quad \overline{u'}=0,\quad \overline{\overline{u}\,\overline{u}}=\overline{u}\,\overline{u},\quad \overline{\overline{u}u'}=0 \tag{5}$$

を利用すると，平均量の方程式は

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}-\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x}-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \tag{6}$$

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}+\overline{u}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x}-\frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}=0 \tag{8}$$

となります．方程式は3個のままですが，未知数は平均の流速と圧力の3個のほかに，$\overline{u'u'}$，$\overline{u'w'}$，$\overline{w'w'}$ の3個が加わります．これらの未知数はレイノルズ応力と呼ばれ，方程式は完結していません．

レイノルズ応力の方程式を立てることは可能です．例えば，(1)式から(6)式を引くと u' の式が得られます．その式の両辺に u' を掛けて平均すると $\overline{u'u'}$ の式が導けます．しかし，その式には $\overline{u'u'u'}$ などの未知数が現れて，やはり方程式は完結しません．

方程式を完結させるために足りない方程式（関係）をどのように与えるかを，クロージャー問題といいます．一般には，$\overline{u'u'}$ などのレイノルズ応力（2次乱流量）あるいは $\overline{u'u'u'}$ などの3次乱流量に，それより次数の低い未知数（2次乱流量に対しては $\overline{u}$ や $\overline{w}$）との関係を与えてやります．これをパラメタリゼーションといい，乱流量をパラメタライズして方程式を完結させるモデルを，乱流クロージャーモデルといいます．

上記の2次乱流量は，大まかには流速（運動量）を大きいほうから小さいほうへ輸送する働きをします．そこで，分子粘性による応力にならって

$$\overline{u'u'}=-K\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right)=-2K\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} \tag{9}$$

$$\overline{u'w'}=-K\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{w}}{\partial x}\right)\approx -K\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \tag{10}$$

とパラメタライズするモデルを1次の乱流クロージャーモデルといいます．ここで K は拡散係数または渦粘性係数といい，平均シアや経験的な関数で与えます．

先に述べたように，2次乱流量は方程式を解いて求めてやることも可能です．この場合は3次乱流量を

$$\overline{u'u'u'}=-K\left[\frac{\partial\overline{u'u'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u'u'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u'u'}}{\partial x}\right] \quad (11)$$

などとパラメタライズする必要があり，これを2次の乱流クロージャーモデルといいます．テイラー展開で次数を高くするほど近似が良くなるように，乱流クロージャーモデルも一般には次数が高いほど精度は良くなります．しかし，次数を高くすればするほど，ねずみ算式に方程式の数が増えるので，2次の乱流クロージャーモデルぐらいが実用的です．

2次の乱流クロージャーモデルの代表格はメラー・山田モデル（Mellor and Yamada 1982）でしょう．彼らのモデルの特徴の1つは，乱流の等方性の程度に応じて幾つかの予報式を診断式に簡略化したことです．例えば，乱流運動エネルギー以外の2次乱流量は診断式で求めるモデルをレベル2.5といい，最も広く利用されています．詳細は中西（2007）をご参照下さい．

ところで，平均操作は空間平均に変えることもできます．この平均操作の乱流クロージャーモデルをLESといいます（中西 2009）．空間平均はいわば移動平均で，(5)式の性質はありません．しかし，気象の分野では(5)式は近似的に成り立つとして，アンサンブル平均に基づいた方程式を利用するのがほとんどです．ではここで主に説明したアンサンブル平均操作の乱流クロージャーモデルと同じかというとそうではなく，LESの乱流の長さスケールは明快に格子間隔で決まるところに大きな違いがあります．

参考文献

Mellor, G. L. and T. Yamada, 1982：Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. Rev. Geophys. Space Phys., **20**, 851-875.

中西幹郎，2007：大気境界層：モデル研究を中心に．天気，**54**，115-118.

中西幹郎，2009：LES．天気，**56**，477-478.

（防衛大学校応用科学群地球海洋学科　中西幹郎）