

予報感度解析

1. はじめに

入力と出力を持つシステムにおいて、入力の変化に対する出力の変化の割合を調べる解析を感度解析という。数値予報では初期値と予報値を、それぞれ、入力と出力と考えることができる。数値予報の感度解析により、例えば、ある地点の気温の予報値に含まれる誤差の要因を時間を遡って調べることや、どの地点で追加観測を行えば台風進路予報の精度を効果的に向上させることができるかを知ることができる。

予報感度解析の最も素朴な手法は、初期値を少しずつ変えた予報を入力変数の数だけ行い、その結果から感度の高い地点と物理量を割り出すことである。しかし、予報モデルは大自由度であるため、この手法は計算機コストの観点から現実的ではない。そのため、随伴ベクトル (adjoint vector) 法や特異ベクトル (singular vector) 法、あるいは、アンサンブル予報に基づいた感度解析が行われる。随伴ベクトル法と特異ベクトル法では、摂動の線形成長を仮定し、随伴モデル (例えば、村上 (1995) 参照) を使うことで、予報の倍から数十倍程度の計算機コストで感度解析を行うことができる。アンサンブル予報に基づいた手法では、アンサンブル予報が初期値の変化の発展の特徴を十分にとらえているものと期待して、アンサンブルのメンバー数という低次元の中で感度を調べる。以下では、随伴ベクトル法を中心として、予報感度解析の基礎概念を簡単な例とともに紹介する。

2. 随伴ベクトル法と特異ベクトル法

いま、大気の状態を n 次元列ベクトル \mathbf{X} で表すことにする。このベクトルの成分は各地の気温や風速などである。時刻 0 の初期値 \mathbf{X}_0 の入力に対して時刻 t の予報値 \mathbf{X}_t を出力する関数を \mathcal{M} とすると、数値予報は形式的に $\mathbf{X}_t = \mathcal{M}(\mathbf{X}_0)$ と表すことができる。この式において、初期値の変化 (摂動) \mathbf{X}'_0 に対する予報値の変化 \mathbf{X}'_t を考えると、両者の間の関係は次式とな

る。

$$\mathbf{X}'_t = \mathcal{M}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}'_0) - \mathcal{M}(\mathbf{X}_0) \cong \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{X}_0} \mathbf{X}'_0 \equiv \mathbf{M} \mathbf{X}'_0 \quad (1)$$

ここでは、 $\mathcal{M}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}'_0)$ をテイラー展開して \mathbf{X}'_0 の高次の項を無視しており、 \mathbf{X}'_t は \mathbf{X}'_0 と線形的に結びついている。この式の中に現れる $\partial \mathcal{M} / \partial \mathbf{X}_0$ は、 \mathcal{M} の成分を \mathbf{X}_0 の成分で偏微分したものからなる n 次の正方行列で、接線形演算子と呼ばれる。以下ではこの行列を \mathbf{M} で表す。

随伴ベクトル法による感度解析では、予報値から計算されるスカラー量 $J(\mathbf{X}_t)$ の初期値に対する感度を割り出す。例えば、 J は予報時刻のある地点の気温やある領域の運動エネルギーなどである。この手法では、スカラー量 J の初期値 \mathbf{X}_0 に対する勾配 $\nabla_{\mathbf{X}_0} J$ を「初期値に対する感度」もしくは単に「感度」と呼ぶ。なぜなら、勾配 $\nabla_{\mathbf{X}_0} J$ の成分は \mathbf{X}_0 の成分の変化に対する J の変化の割合を表すからである。ベクトルの内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と記述することになると、初期値の変化 \mathbf{X}'_0 に対するスカラー量の変化 J' は $J' = \langle \nabla_{\mathbf{X}_0} J, \mathbf{X}'_0 \rangle$ と表される。また、予報値の変化 \mathbf{X}'_t に対する J' の式を立てて、式(1)を代入すると、 $J' = \langle \nabla_{\mathbf{X}_t} J, \mathbf{X}'_t \rangle = \langle \nabla_{\mathbf{X}_t} J, \mathbf{M} \mathbf{X}'_0 \rangle = \langle \mathbf{M}^* \nabla_{\mathbf{X}_t} J, \mathbf{X}'_0 \rangle$ となる。ここで、 \mathbf{M}^* は \mathbf{M} の随伴 (アジョイント) 行列である。以上から、次式の関係が成り立つ。

$$\nabla_{\mathbf{X}_0} J = \mathbf{M}^* \nabla_{\mathbf{X}_t} J \quad (2)$$

勾配 $\nabla_{\mathbf{X}_t} J$ は予報値 \mathbf{X}_t が定まれば決まる量であり、それに随伴行列 \mathbf{M}^* を作用させることで、初期値に対する感度 $\nabla_{\mathbf{X}_0} J$ が求まる。この感度 $\nabla_{\mathbf{X}_0} J$ は随伴ベクトルと呼ばれる。標準的な内積 (ベクトルの成分の積の和) の場合、随伴行列 \mathbf{M}^* は転置行列 \mathbf{M}^T に等しく、また、 $\nabla_{\mathbf{X}} J = \partial J / \partial \mathbf{X}$ である。このときの式(2)は、

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{X}_0} = \mathbf{M}^T \frac{\partial J}{\partial \mathbf{X}_t} \quad (3)$$

となる。

特異ベクトル法による感度解析では、初期値と予報値の変化の大きさを、それぞれ、適当な内積が定めるノルム $\|\mathbf{X}'\| = \sqrt{\langle \mathbf{X}', \mathbf{X}' \rangle}$ で定義し $\|\mathbf{X}'_i\|/\|\mathbf{X}'_0\|$ が大きいものを感度の高い変化と考える。この最大値問題は行列 \mathbf{M} の特異値分解により求められる (例えば、余田ほか (1992) 参照)。そのため、この手法は特異ベクトル法と呼ばれ、得られる感度の高い初期値の変化の場は特異ベクトルと呼ばれる。随伴ベクトル法では出力の変化 J' が \mathbf{X}'_i の 1 次式で表されるのに対して、特異ベクトル法では出力の変化 $\|\mathbf{X}'\|$ が \mathbf{X}'_i の 2 次式で表される。そのため、感度解析で求まる随伴ベクトルは 1 つであるのに対して、特異ベクトルは独立した複数のものからなる。感度の大きいものから順に、第 1 特異ベクトル、第 2 特異ベクトル、…、と呼ばれている。

3. Lorenz (1963) モデルへの適用例

Lorenz (1963) の 3 変数モデルを用いて、随伴ベクトル法の感度解析の例を示そう。このモデルをオイラー法で差分化した式は、

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + (-\alpha x_i + \alpha y_i) \Delta t \\ y_{i+1} &= y_i + (-y_i - x_i z_i + r x_i) \Delta t \\ z_{i+1} &= z_i + (x_i y_i - b z_i) \Delta t \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ここで、 Δt は時間刻み幅であり、下付き添字は離散化した時刻を表す番号である。3 変数 $\mathbf{X} = (x, y, z)^T$ に加えた変化 $\mathbf{X}' = (x', y', z')^T$ の 1 タイムステップ分の時間発展を $\mathbf{X}'_{i+1} = \mathbf{M}_i \mathbf{X}'_i$ の形で記述すると、

$$\begin{pmatrix} x'_{i+1} \\ y'_{i+1} \\ z'_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sigma \Delta t & \sigma \Delta t & 0 \\ -z_i \Delta t + r \Delta t & 1 - \Delta t & -x_i \Delta t \\ y_i \Delta t & x_i \Delta t & 1 - b \Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} \quad (5)$$

となる。この式が接線形演算子を用いた時間発展の式である。式(1)に現れる時刻 0 から時刻 $t = m \Delta t$ までの時間発展を表す接線形演算子は、式(5)を $i=0, 1, \dots, m-1$ まで繰り返して $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{m-1} \cdots \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_0$ と得られる。モデルの時間発展解 \mathbf{X} に沿って摂動 \mathbf{X}' の発

展を考えているので、行列 \mathbf{M}_i が \mathbf{X}_i に依存することに注目していただきたい。

標準内積の場合、この接線形演算子に対応する随伴演算子 (転置行列) は $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}_0^T \mathbf{M}_1^T \cdots \mathbf{M}_{m-1}^T$ である。随伴演算子による 1 タイムステップ分の時間発展を $\partial J / \partial \mathbf{X}_i = \mathbf{M}_i^T \partial J / \partial \mathbf{X}_{i+1}$ の形で記述すると、

$$\begin{pmatrix} \partial J / \partial x_i \\ \partial J / \partial y_i \\ \partial J / \partial z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sigma \Delta t - z_i \Delta t + r \Delta t & y_i \Delta t \\ \sigma \Delta t & 1 - \Delta t & x_i \Delta t \\ 0 & -x_i \Delta t & 1 - b \Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial J / \partial x_{i+1} \\ \partial J / \partial y_{i+1} \\ \partial J / \partial z_{i+1} \end{pmatrix} \quad (6)$$

となる。注目する量を $J = z_m$ としたときの随伴ベクトルの計算手順は次のようになる。まず、ある初期値 \mathbf{X}_0 から式(4)によりモデルを数値積分し、全タイムステップでの \mathbf{X}_i を記憶する。そして、 $\partial J / \partial \mathbf{X}_m = (0, 0, 1)^T$ なので、これを随伴モデルの初期値として式(6)を $i = m-1, \dots, 1, 0$ の順に適用する (初期値に対して \mathbf{M}_{m-1}^T から順に作用していくので、この操作は「後方時間積分」と呼ばれる)。以上により、随伴ベクトル $\partial J / \partial \mathbf{X}_0$ が求まり、初期値の変化に対する予報値 z_m の変化の割合が計算できたことになる。

4. おわりに

本解説では、随伴ベクトル法を中心に予報感度解析の基礎概念と簡単な例を紹介した。現実的な予報感度解析を行うためには、いくつかのことを考える必要がある。まず、初期値の変化のしやすさ (初期摂動の分散や共分散) についてである。一般に、観測がまばらな領域よりも密な領域の方が初期値に含まれる誤差は小さい。このことから分かるように、初期値の変化のしやすさは空間的に均一ではない。このことを考慮に入れないと、予報精度向上を目的とした追加観測地点の割り出しを適切に行うことができない (もともと初期誤差の小さい場所で追加観測を行っても予報精度向上の効果は望めない)。また、本解説では、初期値に対する感度について紹介したが、実際の追加観測の効果を知るためには、初期値ではなく観測値に対する感度を調べる必要がある。つまり、観測値を同化して初期値を作る過程 (データ同化) を含めて予報感度解析を行う必要がある。

もう一つの大きな問題として、摂動の非線形時間発展が挙げられる。ここでは、式(1)を導く際に摂動の時間発展は線形であると仮定したが、予報期間中に活

発な対流活動が見られる場合などでは、想定される初期摂動が線形的に発達するとは考え難い。本解説で示した Lorenz モデルのケースにおいても、扱う時間が長くなると、随伴ベクトル法で求めた感度が意味を持たなくなる。近年、アンサンブル予報に基づいた感度解析が広く行われるようになった（例えば、Enomoto *et al.* 2007; Torn and Hakim 2008）。この手法は、接線形モデルや随伴モデルを必要とせず、非線形発達する摂動を含めた感度解析となるため、実際的な感度解析の研究を促進させる起爆剤としての役割が期待されている。

参 考 文 献

- Enomoto, T., W. Ohfuchi, H. Nakamura and M. A. Shapiro, 2007: Remote effects of tropical storm Cristobal upon a cut-off cyclone over Europe in August 2002. *Meteor. Atmos. Phys.*, **96**, 29-42.
- Lorenz, E. N., 1963: Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130-141.
- 村上茂教, 1995: アジョイント法. *天気*, **42**, 601-603.
- Torn, R. D. and G. J. Hakim, 2008: Ensemble-based sensitivity analysis. *Mon. Wea. Rev.*, **136**, 663-677.
- 余田成男, 木本昌秀, 向川 均, 野村真佐子, 1992: カオスと数値予報 —局所的リアプノフ安定性と予測可能性—. *天気*, **39**, 593-604.

(同志社大学 山根省三)
(海洋研究開発機構 伊藤耕介)