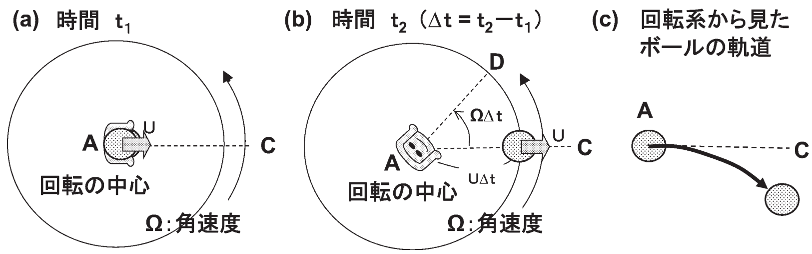
コリオリ力の「ユリイカ」を読んで

中　村　晃　三*

1．はじめに

吉﨑（2013）は，『コリオリ力の「ユリイカ」』と題して，コリオリ力の理解のためのいくつかのアプローチを紹介した．その中で定性的な見方ということで，第1図（吉﨑（2013）の第2図）を示し，「これは直感的にコリオリ力を理解するのに役に立つ．しかしこの方法ではコリオリ力の定量的な大きさを知ることは難しい」としている．筆者は，この図の解釈に少し追加することで，定量的にもコリオリ力を理解したつもりになっているので，その説明を記述してみたい．



第1図　吉﨑（2013）の第2図．慣性系で一定の速度（U）で動くボール（円形のドット域）と一定の角速度Ωの回転軸上の観測者Aから見た動き．(a)時間t_1でボールは回転軸Aを通りCの方に向かい，(b)時間t_2($\Delta t = t_2 - t_1$)で半径$U\Delta t$にボールがある．(c)回転系のAから見たボールの軌道．

必要な概念は，3つである．その第1は，ニュートンの第一法則，つまり，物体は力の作用を受けない限り，一直線上の一様な運動を続ける（加速度は0）こと．第2は，回転系から見た速度は，慣性系から見た速度からその場所の回転速度を引いたものであること．そして，第3は，等速円運動の加速度は，円の中心を向き（速度に直角で），その大きさは，速さをv，角速度をΩで表すと，Ωvとなること，である．

2．視線の回転の効果

まず，力の作用を受けず，慣性系から見て一定の速度で運動するボールを考える（第2図a）．この運動を回転する円盤の中央にいる人が見たとしよう（第2図b）．このとき，この人の視線（これが回転する座標軸に相当する）が回転するので，ボールの（慣性系からみて一定の）速度は回転するように時間変化する（第3図a，速さは一定）．この変化は，円盤の回転周期の時間かかって，元の速度に戻るような一様な回転であり，つまり，等速円運動をする物体の速度の時間変化と同じである（第3図b）．その速度の変化に必要な加速度$\vec{a}$（向心加速度）は，速度ベクトル$\vec{v}$と回転角速度を表すベクトル$\vec{\Omega}$を用いて，$\vec{a} = -\vec{\Omega} \times \vec{v}$と表される．ここで，ベクトル積で書いたのは，加速度の向きが等速円運動の中心向き，つまり，速度に直角な向きになることを示すためで，負の符号があるのは，円盤の回転と逆向きに加速度が働くためである．

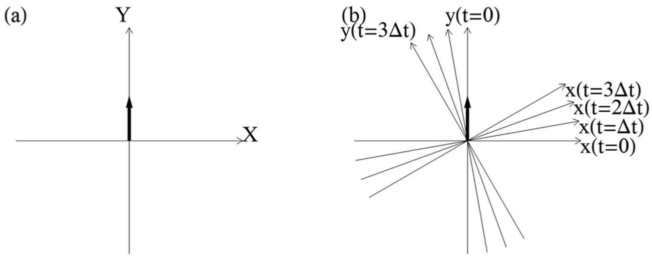
この結果は，回転系からみた場合の速度は，見かけの力として角速度Ωの等速円運動のときの向心力のような力が働くことを示していて，この運動の周期は，$T = 2\pi/\Omega$となる．これに対し，コリオリ力の項はこの2倍で，コリオリ力で回転する場合の周期はこの半分になるはずで，その仕組みを以下に考える．

3．位置による回転速度の変化の効果

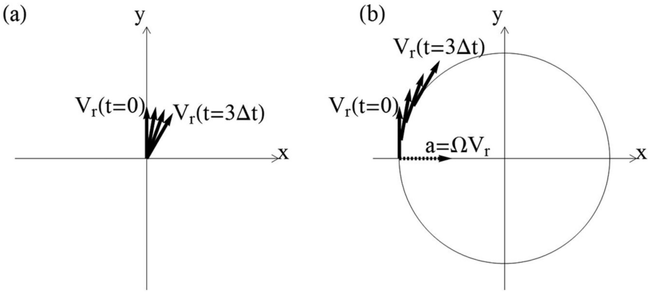
ここまでは，慣性系で一定の速度が回転する座標系から見たときにどのように時間変化するかを書いたも

---

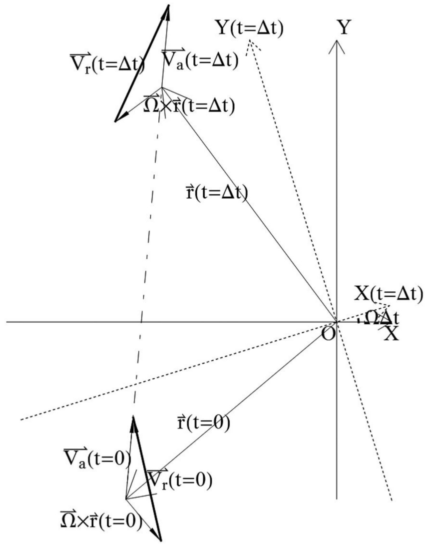
* Kozo NAKAMURA，独立行政法人海洋研究開発機構，地球環境変動領域．
Email：nakamura@jamstec.go.jp



第２図　慣性系で一定の速度ベクトルを，慣性系から見た場合(a)と，回転系から見た場合(b)の図．図ｂでは，軸が反時計回りに回転している．



第３図　(a) 慣性系で一定の速度ベクトルを回転系から見た場合の時間変化．(b) (a)のような時間変化をする速度ベクトルによる等速円運動の軌跡．この運動は周期 $T=2\pi/\Omega$ で変化する．



第４図　慣性系からみたときの，$t=0$ と $t=\mathit{\Delta} t$ の時刻での，位置 $\vec{r}$，絶対速度 $\vec{v}_a$，回転速度 $\vec{\Omega}\times\vec{r}$，相対速度 $\vec{v}_r$ の関係 $\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{\Omega}\times\vec{r}$ を示す図．絶対速度は変化せず，回転速度は位置によって変化し，相対速度はそれらの差で定義される．

のである．ところが，慣性系から見て一定の速度で運動するものを回転系の人が見る回転系での速度は，慣性系での速度とは異なる．回転系でのものの移動速度は，回転する円盤に相対的な速度である．式では

$$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{\Omega}\times\vec{r} \tag{1}$$

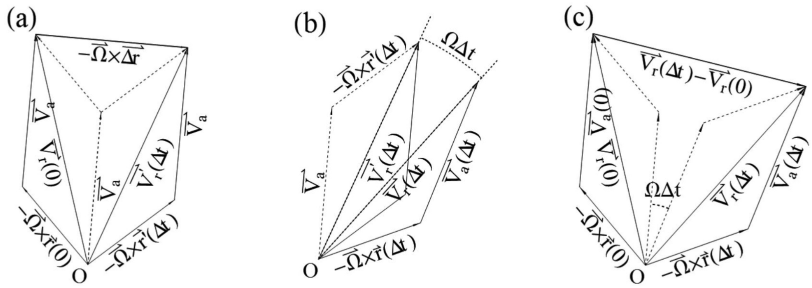
となる．ここで，$\vec{v}_a$ は慣性系からみた速度（絶対速度と呼ぶ），$\vec{v}_r$ は回転系からみた速度（相対速度と呼ぶ），$\vec{\Omega}\times\vec{r}$ は回転の中心からの位置ベクトルが $\vec{r}$ の地点での回転の速度（適当な呼び名を知らないので，回転速度という名前で呼ぶ）で，相対速度 $\vec{v}_r$ は絶対速度 $\vec{v}_a$ から回転速度 $\vec{\Omega}\times\vec{r}$ を引いたものになる．

ここで，円盤上を移動すると，回転中心からの位置が変化するため，回転速度が変わり，相対速度と絶対速度の差 $\vec{v}_r-\vec{v}_a=-\vec{\Omega}\times\vec{r}$ も変化することに注意しよう．第４図は絶対速度 $\vec{v}_a$ のものが，$\vec{r}\,(t=0)$ から $\vec{r}\,(t=\mathit{\Delta} t)$ へ移動した時の様子を慣性系から見た図である．絶対速度は一定だが，それぞれの位置での回転速度（$\vec{\Omega}\times\vec{r}\,(t=0)$ と $\vec{\Omega}\times\vec{r}\,(t=\mathit{\Delta} t)$）の差だけ相対速度に差ができる．その変化は，位置の変化を $\mathit{\Delta}\vec{r}=\vec{r}\,(t=\mathit{\Delta} t)-\vec{r}\,(t=0)$ で表すと，$-\vec{\Omega}\times\mathit{\Delta}\vec{r}$ になり，この変化が時間 $\mathit{\Delta} t$ の間の起こったとすると，見掛けの加速度として $-\vec{\Omega}\times\mathit{\Delta}\vec{r}/\mathit{\Delta} t=-\vec{\Omega}\times\vec{v}_a$ が得られる（第５図ａ参照）．ここの $\vec{v}_a$ は絶対速度で，それを相対速度と回転速度に分けると，コリオリ加速度の半分 $-\vec{\Omega}\times\vec{v}_r$ と遠心加速度 $-\vec{\Omega}\times\vec{\Omega}\times\vec{r}$ が出てくる．

ここまで，$t=\mathit{\Delta} t$ の相対速度を，元の座標（慣性座標系もしくは $t=0$ の回転座標系）からみた値で考えていた（第５図ａ）が，回転系での見かけの加速度は，回転系からみた速度の時間変化から考えるべきもので，$t=\mathit{\Delta} t$ の回転座標系から見た相対速度 $\vec{v}_r\,(t=\mathit{\Delta} t)$ と最初の $\vec{v}_r\,(t=0)$ から求めるものである．$\vec{v}_r\,(t=\mathit{\Delta} t)$ は，第５図ｂで示されるように，第５図ａのベクトル $\vec{v}'_r\,(t=\mathit{\Delta} t)$ を $|\vec{\Omega}|\mathit{\Delta} t$ だけ時計回りに回転させたもの $\vec{v}_r\,(t=\mathit{\Delta} t)$ になる．この変化は前半で議論した軸の回転の効果でもたらされるもので，その分の見かけの加速度は角速度 $\vec{\Omega}$ で回転する等速円運動のもの

と同じで，コリオリ加速度の半分$-\vec{\Omega}\times\vec{v}_{\rm r}$である．

つまり，回転系での見かけの力は，第5図cにあるように，$\vec{v}_{\rm r}(t=\Delta t)-\vec{v}_{\rm r}(t=0)$から求めるものであるが，それは，軸の回転の効果，つまり，$\vec{v}_{\rm r}(t=\Delta t)-\vec{v}'_{\rm r}(t=\Delta t)$と位置の変化による回転速度の変化の効果，つまり，$\vec{v}'_{\rm r}(t=\Delta t)-\vec{v}_{\rm r}(t=0)$の和として表され，前者は，コリオリ加速度の半分，後者は，コリオリ加速度の半分と遠心加速度である．このようにして，コリオリ力と遠心力が説明できることが分かる．（図では，各成分が見やすいように，Δtを大きめに取っているため，ベクトルの和が正確に表せていないが，ご了解願いたい．）



第5図　(a) 第4図から抜き出した$t=0$と$t=\Delta t$の時の絶対速度$\vec{v}_{\rm a}$，回転速度$\vec{\Omega}\times\vec{r}$，相対速度$\vec{v}_{\rm r}$の関係を示す図．$\vec{v}_{\rm r}=\vec{v}_{\rm a}-\vec{\Omega}\times\vec{r}$の形で示した．但し，座標軸の回転の効果は入っていないため，絶対速度は時間によらず共通で，相対速度の差が$-\vec{\Omega}\times\Delta\vec{r}$になることが示されている．$t=\Delta t$の相対速度と位置は，図cの$\vec{v}_{\rm r}(t=\Delta t)$，$\vec{r}(t=\Delta t)$と区別するため，$\vec{v}'_{\rm r}(\Delta t)$，$\vec{r}'(\Delta t)$と書いた．(b) 座標軸の回転の効果を示した図．回転系から見た$t=\Delta t$の速度は，座標軸が$\Omega\Delta t$だけ回転するため，図aのベクトル$\vec{v}'_{\rm r}(\Delta t)$を$-\Omega\Delta t$だけ回転したもの，つまり，$\vec{v}_{\rm r}(\Delta t)$になる．(c) (a)と(b)の両方の効果を合成した図．図cの$\vec{v}_{\rm r}(t=\Delta t)$と$\vec{v}_{\rm r}(t=0)$の差が見かけの力による変化である．

4．式変形との対応と終わりに

最後に式で確認しておこう．時間微分の式で書くと以下のとおりである．ベクトル$\vec{A}$の時間微分は，

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\rm a}=\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\rm r}+\vec{\Omega}\times\vec{A} \tag{2}$$

となる．但し，下付き添え字のaとrはそれぞれ慣性系と回転系での値を表す．$\vec{A}$に$\vec{r}$を代入すると，

$$\vec{v}_{\rm a}=\vec{v}_{\rm r}+\vec{\Omega}\times\vec{r} \qquad (1)再$$

が得られ，$\vec{A}$に$\vec{v}_{\rm a}$を代入すると，

$$\left(\frac{d\vec{v}_{\rm a}}{dt}\right)_{\rm a}=\left(\frac{d\vec{v}_{\rm a}}{dt}\right)_{\rm r}+\vec{\Omega}\times\vec{v}_{\rm a} \tag{3}$$

が得られるが，この右辺の$\vec{v}_{\rm a}$に(1)式を入れると，

$$\left(\frac{d\vec{v}_{\rm a}}{dt}\right)_{\rm a}=\left(\frac{d\vec{v}_{\rm r}}{dt}\right)_{\rm r}+\left(\frac{d(\vec{\Omega}\times\vec{r})}{dt}\right)_{\rm r}+\vec{\Omega}\times\vec{\Omega}\times\vec{r}+\vec{\Omega}\times\vec{v}_{\rm r} \tag{4}$$

となる．左辺＝0の場合に，右辺第1項以外を移項した形に書き，左右を入れ替えると，

$$\left(\frac{d\vec{v}_{\rm r}}{dt}\right)_{\rm r}=-\left(\frac{d(\vec{\Omega}\times\vec{r})}{dt}\right)_{\rm r}-\vec{\Omega}\times\vec{\Omega}\times\vec{r}-\vec{\Omega}\times\vec{v}_{\rm r} \tag{5}$$

となり，この式の右辺第1項と第3項がコリオリ力の項で，それぞれ，絶対速度と相対速度の差が位置によって変化するためと，軸の回転のための項で，右辺第2項が遠心力に相当する項になる．コリオリ項の定量的な大きさ，特に係数2が出てくる仕組みが多少は分かりやすくなったと思う．

参　考　文　献

吉﨑正憲，2013：コリオリ力の「ユリイカ」．天気，60，119-124．