

安定成層大気による多像の蜃気楼： レイ・トレーシングと温度構造推定の可能性

柴田 清孝*

要 旨

厳冬期の2013年1月12日に凍結した風蓮湖（根室）ごしに距離10～20 kmの範囲に1つの虚像の下位蜃気楼と数個の虚像の上位蜃気楼を併せ持つ蜃気楼が観測された。この蜃気楼について安定成層の温度プロファイルを設定してレイ・トレーシングを行い、観測された蜃気楼を定性的に再現することができた。また、これらの成因について調べ、曲率半径のプロファイルが極小層をもつとき、その近辺の全反射による光が蜃気楼を形成することがわかった。極小層の下に極大層がある場合は、この層によるあまり曲げられないレイが重なり、ある距離で多像になる。下位蜃気楼のみがある場合も安定成層による全反射で再現することができた。曲率半径の極値の高度は温度の変曲点高度に対応し、安定成層で温度が下に凸から上に凸に変わる変曲点で曲率半径は極大、逆に上に凸から下に凸に変わる変曲点で曲率半径は極小になる。さらに、複数の距離で複数の虚像を示す蜃気楼は大気の温度構造の情報量を多く含むので、逆問題を解くには有利であり、蜃気楼から温度構造が得られる可能性について言及した。

1. まえがき

大気温度に比べ海面水温が非常に冷たい場合（上暖下冷）、地表付近から出た光が通常と異なり大気によって全反射され上に凸に曲げられて地平線より向こうにある遠くの見えないはずの景色や物体が実際的位置より浮かびあがる上位蜃気楼が見えることがある（Greenler 1980；Fraser and Mach 1976）。富山県魚津市での富山湾を挟んで見える蜃気楼は有名であり（北日本新聞社 1981）、その時の温度構造の成因などが調べられている（木下・市瀬 2002；中川 2009）。上暖下冷の上位蜃気楼は地表の物体に限るものでなく、太陽でも見られる（川上・東條 2003）。

一方、蜃気楼には実像の下に見える下位蜃気楼と呼ばれるものもあり、光が下に凸に曲げられて起きるとされている。このときの成層状態は下位蜃気楼の一種である炎天下のアスファルト道路上で生じる「逃げ

水」のアナロジーから下層が上層より非常に暖かい上冷下暖であると説明されている。しかし、2013年の1月と2012年2月に厳冬期の凍結した風蓮湖（根室）ごしに撮影された写真には隣町の別海町の家屋などの下位蜃気楼が写っており上冷下暖の温度構造では説明できないものである。

蜃気楼を起こす光（ray, レイ）の屈折経路を調べるレイ・トレーシング（ray-tracing）の手法は確立されており（Lehn 1985；Lehn and El-Arini 1978；Kropla and Lehn 1992）、観測された温度プロファイルを与えて極地の蜃気楼や極夜明け前に太陽が見えるノーヴァヤ・ゼムリャー効果（Novaya Zemlya effect）が調べられている（Lehn and German 1981）。同様にして、簡易的な温度観測のデータを用いてロシア白海に浮かぶ船の上位蜃気楼が再現されており（川上・東條 2004）、レイ・トレーシングは蜃気楼の光の屈折を調べるのに非常に有力な方法である。

本論文は、風蓮湖の2012年2月の下位蜃気楼とともに2013年の1月の下位蜃気楼と上位蜃気楼が同時に起きている多像の蜃気楼を説明するため、Lehn（1985）の定式化を用いてレイ・トレーシングを行い、上暖下

* 気象研究所, kshibata@mri-jma.go.jp

—2013年4月1日受領—

—2013年7月5日受理—

冷の簡単な温度構造で多像や下位蜃気楼が可能であることを示すものである。ただし、実際の温度プロファイルのデータがないため、必ずしも現実に観測された蜃気楼の再現は出来ていない。また、多像の蜃気楼の場合は単一像の場合に比べて温度構造の情報量を多く含み、2013年1月の風蓮湖のように異なる距離の多像が得られればさらに多くなるので、レイ・トレーシングの逆問題を解いて、もしくはモンテカルロ法を用いて下層大気温度構造の推定も可能であることにも言及している。

2. 観測された厳冬期の風蓮湖ごしの蜃気楼

第1図は2013年1月12日の早朝に根室市の別当賀川が風蓮湖へ注ぐ河口近く（カメラ高度は約5m）から凍結した風蓮湖ごしに北西の対岸の別海町を撮影したもので、左端に本別海（距離約16km）の漁港の赤いクレーンや製氷工場、右側に走古丹（約8km）近く

の番屋が写っている。同町の実像の建物の上に「上位蜃気楼」の虚像が数個、その上にはさらに遠くの雪原の蜃気楼が帯状に重なっている。建物の下にも「下位蜃気楼」の虚像が見えている。この右側の建物付近を模式的に描いたのが第2図（毎日新聞社提供）である。実像と虚像同士の間には鏡面对称のような線が何本か存在している。2012年2月14日の早朝も同様に凍結した風蓮湖ごしに走古丹の集落を撮影した写真（カメラ高度は約3m）に建物の実像の下に下位蜃気楼が、さらにその下の湖水面のすぐ上にも鏡面对称の積雪が写っており、上下に下位蜃気楼が2つあることが報告されている（毎日新聞）。気象条件は別海町のアメダスによると両日も夜間の温度変化は小さく、風向は西よりで風速は1m/s以下、08時頃から日照があり、日中は快晴であった。気温は夜明けとともに急速に上昇するが、風には大きな変化は起きていない。これらの蜃気楼は夜間の強い接地逆転層が夜明けと



第1図 風蓮湖の蜃気楼。2013年1月12日07時10分頃に根室市の別当賀川の風蓮湖への河口近く（カメラ高度は約5m）から凍結した風蓮湖ごしに北西の対岸の別海町を撮影。本別海（距離約16km）の漁港の赤いクレーンや製氷工場、走古丹（約8km）近くの番屋が写っている。同町の建物の上に「上位蜃気楼」の虚像が数個、その上にはさらに遠くの雪原の蜃気楼が帯状に重なっている。建物の下にも「下位蜃気楼」の虚像が見えている（撮影者は長尾 康，カメラ：キヤノン7D+800mm，©長尾 康）。

もに弱まり始めた頃の現象であり，明らかに上暖下冷の温度構造である。

多像の蜃気楼は小樽でもときおり観測されている（第3図）．この2008年6月23日夕刻の石狩湾ごしの蜃気楼には下位蜃気楼は無いが，上位蜃気楼には鏡面対称線が2～3本あり，6つくらいの虚像がある．この

時の気象条件も小樽西方で温められた暖気が石狩湾へ移流して上暖下冷の温度構造を形成していた（大鐘・金子 2009）．

3. 光の屈折と曲率半径

幾何光学でレイの伝播を規定するのはスネルの法則で，大気の曲率を考慮した場合には幾何学的な関係から屈折率 n と地球中心から考えている層までの距離 r とその層への入射角 ϕ を使って

$$n \cdot r \cdot \sin \phi = \text{const} \quad (1)$$

という簡単な関係が成り立つ（例えば柴田 1999）．幾何学を使わずとも，光の2点間を結ぶ到達時間が最小であること，つまり光路に沿っての屈折率の積分が最小値であること（フェルマー原理）と，屈折率が高さのみの関数であることを使えば同じ結果が導ける．

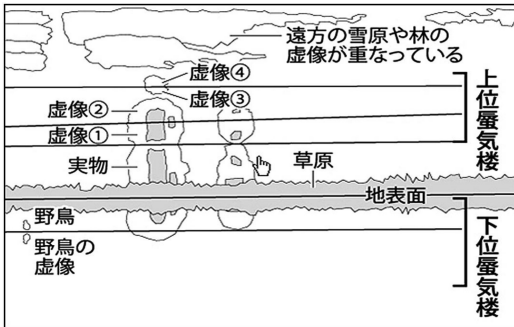
レイの伝播を調べるために曲率 κ もしくは曲率半径 ξ を導入すると見通しがつけやすくなる．(1)式と曲率半径の定義から

$$\kappa = \frac{1}{\xi} = -\frac{\sin \phi}{n} \frac{dn}{dr} \quad (2a)$$

が導かれる．具体的な問題を扱う場合は，大気（地球）の曲率半径を基準にできるので，曲率半径を使う方が便利である．蜃気楼は地表に近い現象であり（ $\sin \phi \sim 1$ ），大気の屈折率はわずかに1より大きな量なので定性的な議論をするとき(2a)式はさらに簡略化され， r を高さ z に置き換えて

$$\kappa = -\frac{dn}{dz} \quad (2b)$$

となる．いま，水蒸気量，二酸化炭素量を固定し（これらの効果は地球大気では非常に小さい），光の波長も固定すれば屈折率から1を引いた量（余屈折率 [co-refractive index] と



第2図 2013年1月12日の蜃気楼（写真1）の右半分の模式図（毎日新聞社提供）．



第3図 石狩湾の蜃気楼．（上）2008年6月23日17時36分に小樽高島から西方向の石狩湾新港を撮影．（下）蜃気楼が無い時の同じ被写体の写真（撮影者は両写真とも大鐘卓哉，カメラ：ペンタックス istDS2+600 mm，©大鐘卓哉）．

呼ぶ)は密度 ρ に比例する (例えば Ciddor 1996) と近似できるので、波長依存 $h(\nu)$ と併せて

$$n-1 \propto \rho \cdot h(\nu) \quad (3)$$

つまり

$$\kappa \propto -\frac{d\rho}{dz} \quad (4)$$

次に密度の鉛直分布を考える。気体の状態方程式と静水圧の式を使い、温度プロファイルを高さ z の線形関数 (温度減率 Γ) と近似し z の 1 次までを考慮すると

$$P(z) \sim P_0 \left(1 - \frac{g}{RT_0} z\right) \quad (5)$$

となり、圧力は温度減率に依らないことがわかる (ただし、 P , T , R はそれぞれ圧力, 温度, 気体定数であり, $P_0 = P(0)$, $T_0 = T(0)$). 右辺カッコ内の第 2 項の係数は平均スケールハイトの逆数であり, 280 K で 8 km 程度である。密度は状態方程式に圧力と温度を代入して

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{P}{RT} = P_0 \left(1 - \frac{g}{RT_0} z\right) / R (T_0 - \Gamma z) \\ &\sim \rho_0 \left(1 - \frac{g}{RT_0} z + \frac{\Gamma}{T_0} z\right) \end{aligned} \quad (6)$$

となり、ここで温度減率が現れる。右辺カッコ内の第 2 項と第 3 項の絶対値の比を評価すると、地球大気の平均的な 6.5 K/km の減率に対して約 5 対 1 であり、ほとんどの場合は第 2 項の効果が大きく、密度は高さとともに減少するので、(4)式から光線の曲率は正である。つまり、光は上に凸に屈折する。しかし、非常に稀ではあるが曲率が負になって、光が下に凸に進む場合がある。それは温度減率が極端に大きく密度の鉛直勾配が反転するほどの強い上冷下暖の場合で、その臨界値は(6)式から $\Gamma = (g/R) \sim 34$ K/km で与えられ、乾燥断熱減率の約 3 倍の非常に不安定な成層であり、炎天下のアスファルトや金属等に接している空気層でそうなることがある。これだけ不安定が大きいと強い対流が起きているはずであるが、アスファルトや金属等の上では乾いた対流なので、見た目には炎湯のように蜃気楼がゆらゆら揺れているだけに見える。このように光が下に凸に進む場合は極めて稀ではあるが、見かけ上そのように表示される場合もある。曲率のある地球や大気を平面 (板) や直線で表示する場合、それよりも小さな正の曲率を持ち実際は上に凸に進む光線があたかも負の曲率を持ち下に凸に表示され

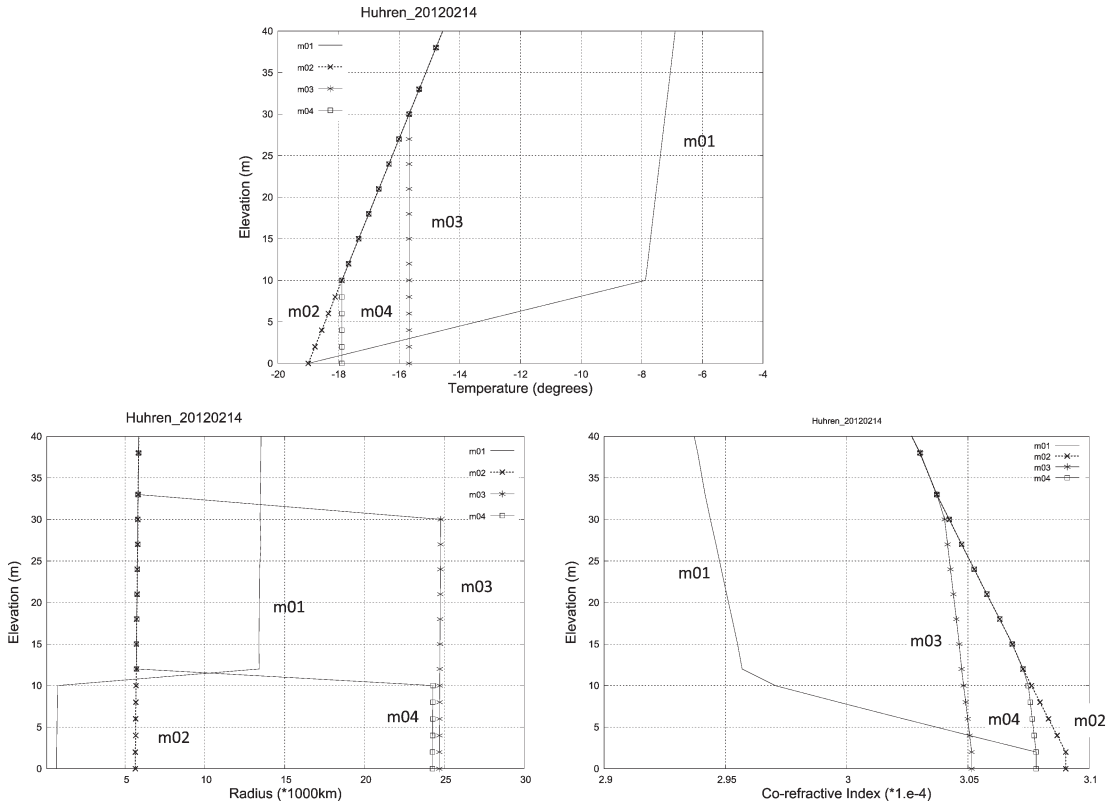
るので注意が必要である。

4. レイ・トレーシング

4.1 折れ線的な温度プロファイル

上下に下位蜃気楼が 2 つ報告された 2012 年 2 月 14 日の北海道東部の気象条件を取り上げる。風蓮湖の西南西約 90 km にある釧路の 09 時の高層観測の指定気圧面データによると地表 (ジオポテンシャル高度 19 m) と 1000 hPa (同 157 m) で -8.2 , -3.7°C と接地逆転層があった。特異点データによると逆転層トップは 73 m, -3.1°C である。後述するように今回の蜃気楼は地表高々 20 m までの局所的な温度プロファイルによるので釧路の高層データがどこまで使えるか不明であるが、このデータを基本に変更を加えて、レイの伝播を調べる。蜃気楼の写真が撮られたのは 07 時過ぎで、この前後の時刻で、別海では 07, 08 時でそれぞれ -18.8°C , -14.7°C であった。これらから、まず解釈を簡単にするため折れ線的な 3 つの温度プロファイルを設定した。釧路の地表から 1000 hPa までの温度プロファイルについて、地表 10 m までを強安定層 ($\sim 11^\circ\text{C}/10$ m), 地表を -19°C にした m01; 地表 -19°C , 150 m で -3.7°C の直線プロファイルの m02; m02 を地表 30 m まで等温層とした m03 である。さらに、m03 の変形として、10 m, 4 m までを等温とした m04, m05 も設定した。これら m01 ~ m04 の温度, 余屈折率, 曲率半径のプロファイルを図 4 (m05 は省略) に示す。ただし、光の波長は可視光の中央付近の $0.55 \mu\text{m}$ である。以降、波長はこの値に固定するが、扱っている光路長が短いので、波長依存は無視できる。屈折率は相対湿度を 0.5 として Ciddor (1996) による密度の近似式を使い、(2a) 式の入射角 90° に対する曲率半径を描いている (実質的には (2b) 式と同じ)。相対湿度の影響は元々小さいが、今回の場合はさらに温度が氷点下と低いので非常に小さい。

曲率半径は余屈折率の z 微分の逆数の符号を変えたもの、つまり z の余屈折率微分のようなものなので、図 4 の余屈折率の傾き (の符号を変えたもの) で与えられ、プロファイルが立っているほど大きな曲率半径になる。m01 の強安定の接地層では余屈折率は高さと共に急激に小さくなり、曲率半径は非常に小さく約 1,000 km である。一方、m03 の等温の接地層はこの逆に曲率半径は地球の曲率半径よりはるかに大きく約 25,000 km であり、弱い安定層の m02 では地球



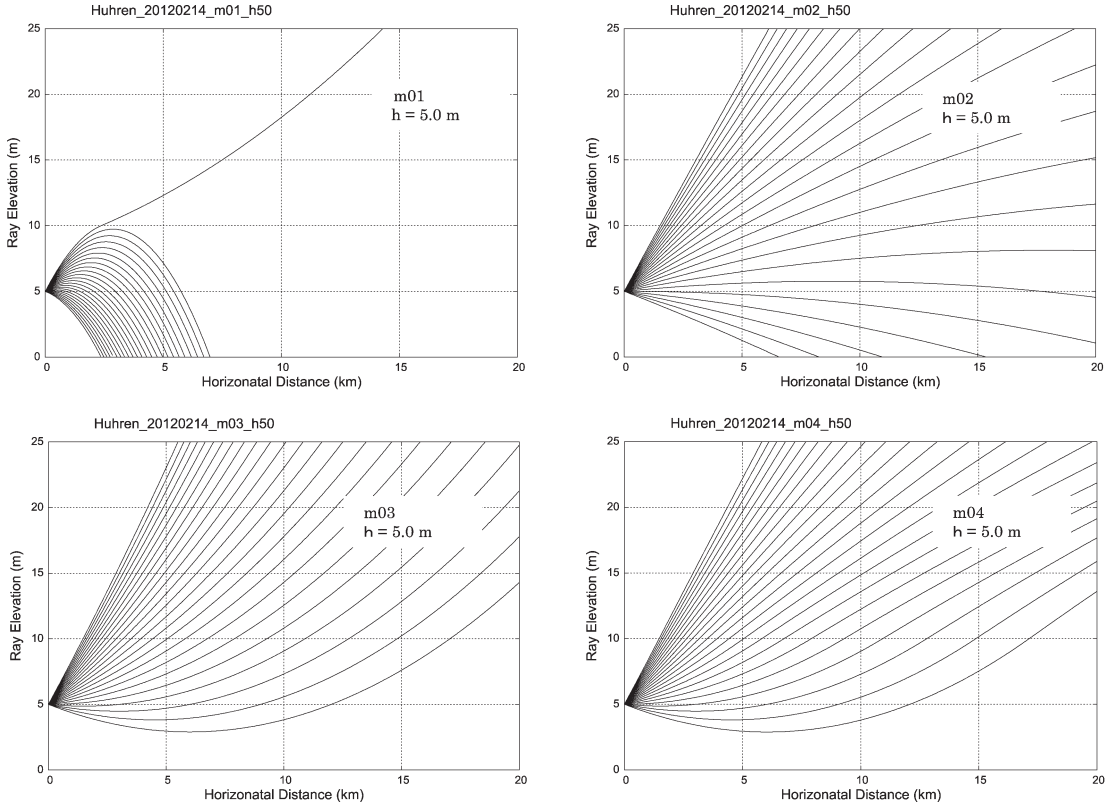
第4図 折れ線的な温度プロファイル (m01~m04) とその曲率半径, 余屈折率のプロファイル。

の曲率半径よりやや小さい。m04 (m05) の曲率半径は10 m (4 m) まではm03とほとんど同じでその上ではm02と同じである。このため、m03とm04の接地層では水平近くに出た光は直進的に進み地表にぶつかることはないが、m01では大きく下方に曲げられ近距離で地表に達する。m02ではある程度の距離のところで地表に達するといった定性的な判断が可能である。

レイ・トレーシングの方法はLehn (1985) に倣った。その定式化は次のとおりである。水平には一様性を仮定し、鉛直には屈折率の z 微分(水平入射のレイの曲率)が均質な多層に分割する。すると均質層内ではレイの高さ z が局所座標(xz)で水平距離 x の放物線(2次の係数が曲率に反比例する)で表現される。この xz 座標はレイの考えている層への入射点を局所原点とするもので、レイが次の層へ移ると xz 座標も移動する。

レイ・トレーシングの計算は観測者の眼の位置(出射点)からレイを出してその軌跡を追いかけるもので

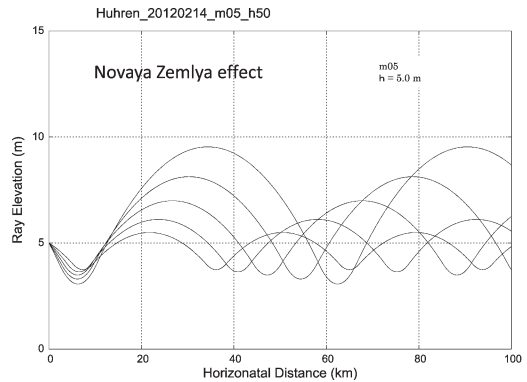
あり、初期条件として出射時の高さ(出射高度)と仰角(elevation angle)を指定して計算を行い、レイの軌跡(高度(ray elevation)と水平距離(horizontal distance))を求める。言うまでもないが、仰角と入射角は互いに余角の関係にある。レイ・トレーシングによる軌跡を第5図に示す。出射高度(h)は5 m、出射の仰角範囲は水平を挟んで $-0.04 \sim 0.2$ 度、分解能は0.002度で計算し、図では0.01度毎に示している。m01の場合にはほとんど全部のレイは強安定の接地逆転層を突き抜けられず近距離で地表にぶつかり、最大到達距離は約7 kmである。しかし、仰角が0.196度以上のレイは逆転層を突き抜けており、入射角が小さい(仰角が大きい)と全反射が起きにくいことを表している。安定度が小さいm02では曲率半径が地球の曲率半径よりやや小さい程度なので、地球や大気を平板にする第5図の表示(平板表示)では緩やかに下に曲がる軌跡となり、上下に大きく広がっており、他の場合に比べ直線的な軌跡と言える。高さ30 mまでが等温層のm03では曲率半径が地球半径よりはるかに大



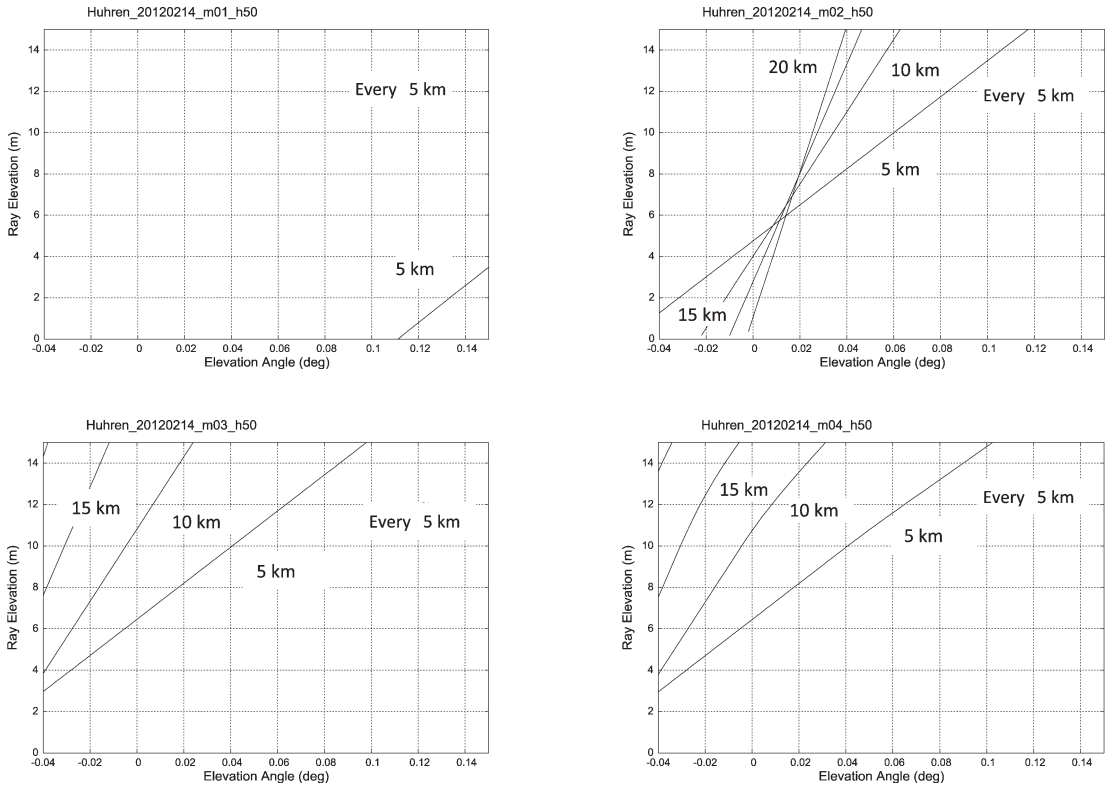
第5図 出射高度が5 mのレイの軌跡（距離0～20 km，高さ0～25 m），左上：m01，右上：m02，左下：m03，右下：m04。出射仰角 -0.04 度から 0.2 度までを 0.01 度毎に描いてある。

きいので曲がり方が小さいが，平板表示では下に凸の軌跡となり，今回の設定の出射の仰角範囲では地表に到達するレイはない。薄い等温層（10 m）のm04では平板表示で下向きに出たレイは下に凸の軌跡を描きながら等温層を突き抜けた後は高度がm03に比べて低くなっており，10 mを境に曲率半径が階段状に小さくなっている効果が顕著である。

接地等温層（4 m）がレイの出射高度の5 mより低いm05ではある小さな負の出射角のレイに対してこの層付近で導波管が形成され，レイが広がらずに高度を保ち非常に遠くまで到達するようになり（第6図），いわゆるノーヴァヤ・ゼムリャー効果が生じている。このレイをさらに遠くまで追いかけるには大気の水一様性の近似が保てなくなる隣接の大気の情報が必要である。このレイが接地等温層トップ付近で上に曲げられるのは前述したように見かけ上の現象であり，実際は曲率が正であるので下に凸の軌跡を描く。このレ



第6図 ノーヴァヤ・ゼムリャー効果を再現するレイの軌跡。m05温度プロファイルで出射高度5 mのレイの内，遠くまで低い高度を保って伝搬する幾つかの軌跡。レイの仰角範囲 $-0.024 \sim -0.008$ 度，間隔 0.004 度。



第7図 第4図の温度プロファイルに対応する出射仰角-高度の特性曲線。5 km から20 km までの5 km 毎。
 左上：m01，右上：m02，左下：m03，右下：m04。

イが遠くまで伝搬する理由は以下の通りである。レイの曲率半径が大気の曲率半径よりはるかに大きく前者は後者の4倍程度なので、ほぼ直進するとして説明すると、等温層の上面から大きな入射角（ほぼ水平入射）で入ったレイは距離と共に深く入るがそのうち大気の曲がりの効果が顕れて浅くなりやがて上面から抜け出してしまふ。等温層の上層では上へ向かうレイは大気の曲率半径よりかなり小さな曲率半径を持つので、上に凸の軌跡を描いて下に向かうように屈折（全反射）される。これを繰り返すことによって、これらのレイは遠くまで高度を保って伝搬するのである。

レイ・トレーシングによる軌跡から眼やカメラに映る像を評価するには初期出射の仰角 (θ) と高度 (z) の関係を表す特性曲線が必要であり、これは水平距離 x をパラメータにして表現される。つまり、レイ・トレーシングでは高度と水平距離の関係が仰角をパラメータにして表現され、 $z=f(x; \theta_i)$ [$i=1, n$] となる。この関係から x を固定して θ について解いた $z=g(\theta; x_j)$ [$j=1, m$] が特性曲線である。第5

図から水平距離5 km 毎の20 km までの特性曲線を描くと第7図のようになる。m01では5 km に対する1本しかなく、m02では上述したようにレイが直線的な軌跡を持ち上下に大きく広がっている結果として遠くの距離までの特性曲線がこの小さな範囲の仰角と高度に存在している。特性曲線の傾きは分解能を表し、レイが直線的に進む場合のアナロジーからわかるように、距離が大きくなると傾きが急になるのが一般的である。傾きはまた像の歪みをも表し、局所的に大きく変化する場合は像が伸びたり縮んだりする。

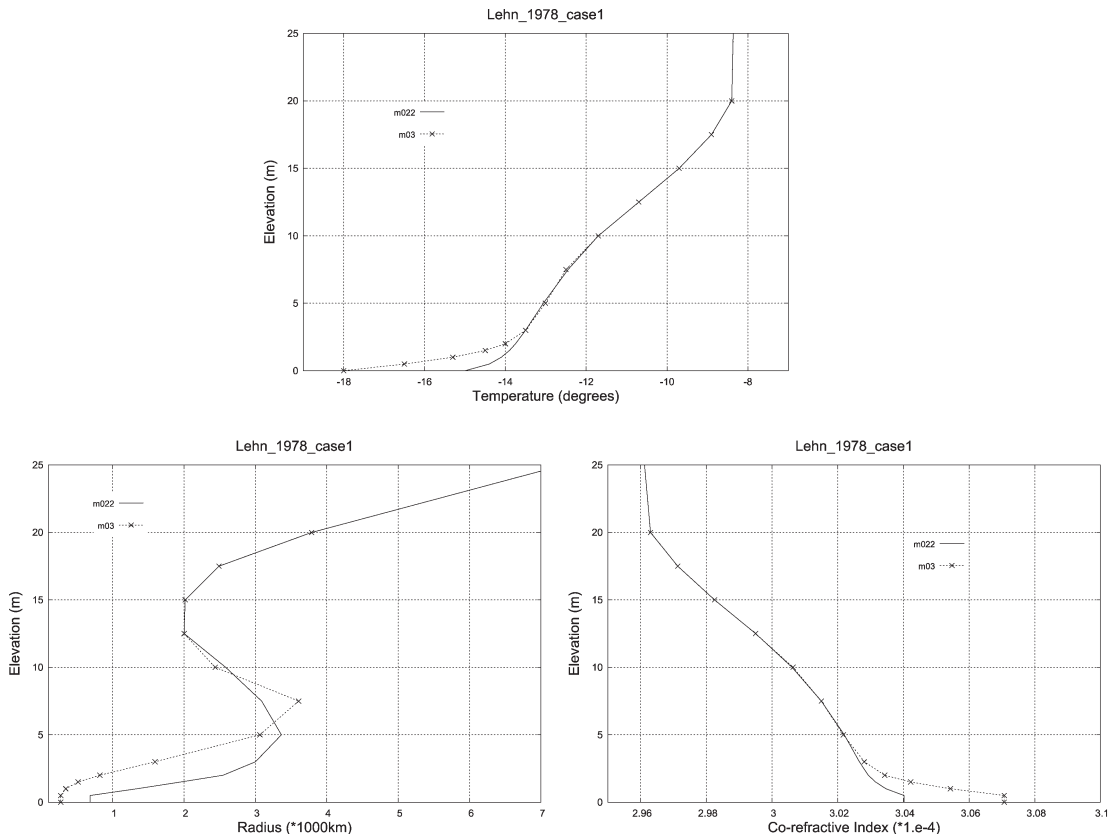
m02で5 km から20 km までの特性曲線が仰角0.01~0.02度、高度5.5~8 mの狭い範囲で交差しているのはレイの直線的な軌跡によるものである。このことは平板表示で完全な直線の軌跡の場合を考えると理解が容易である。その場合は高度5 m、仰角0度の点ですべての特性曲線が交わり、仰角が正の見上げる場合も負の見下げる場合も同じ高度に対し遠い距離の方が仰角の絶対値が小さくなる（特性曲線の勾配が大きくなる）。m02もほぼこの特性を有しており、上記

の特性曲線の狭い交差領域を基準にすると同じ高度に対して遠い距離の方が相対的な仰角（実際の仰角から交差領域の仰角を引いた値）の絶対値は小さくなると近似できる。一方、m03の場合は5, 10, 15 kmの特性曲線は交差せず見下げる場合も見上げる場合と同じ関係を保っており、直線的な軌跡の場合と非常に異なっている。これは下向きに出射したレイが10, 15 kmで変曲点を通過して上向きになっていることの結果である。たとえば、4 mの高度の場合、5 kmでは -0.03 度くらいの仰角のレイに相当し、10 kmではさらにマイナスの仰角 -0.04 度くらいのレイになり、10 kmの方が仰角の絶対値が大きくなっている。m03とm04の違いは後者の等温層トップの10 mより高いところで顕著になり、後者の特性曲線の勾配は前者のものより緩やかである。

4.2 滑らかな温度プロファイル

以上のような折れ線的な温度設定では蜃気楼が生じ

ないので、50 kmより遠い物体が見える蜃気楼がシミュレートされている Lehn and El-Arini (1978) の case 1 の温度構造を風蓮湖の蜃気楼にシンプルに変形して使う。オリジナルの温度構造はアイスランド南部で観測される蜃気楼を再現することができ、中間の距離にある小舟の上にぼんやりとした水の壁のような第2の水平線を形成し、レイ・トレーシングによると距離60 km付近で種々の仰角のレイが重なる。接地逆転層の温度の幅（約 7°C ）はそのまま、厚さを約40 mから半分の20 mにし、地表気温を -15°C にし、曲率の鉛直プロファイルに不自然な膨らみが出ないように微調整したものの Lehn_m022 (lm022) と、さらに地表気温を -18°C にして最下層の5 mを強安定にした Lehn_m03 (lm03) の2つの例を示す。その温度、余屈折率、曲率半径のプロファイルを第8図に示す。lm022とlm03の両方とも高度8~20 mの領域に曲率半径の極小域があり、この範囲でレイが大きく曲げられることが想定できる。lm022とlm03の温度構造の



第8図 厳冬期の風蓮湖の蜃気楼の再現に使った温度プロファイルとその曲率半径、余屈折率のプロファイル。

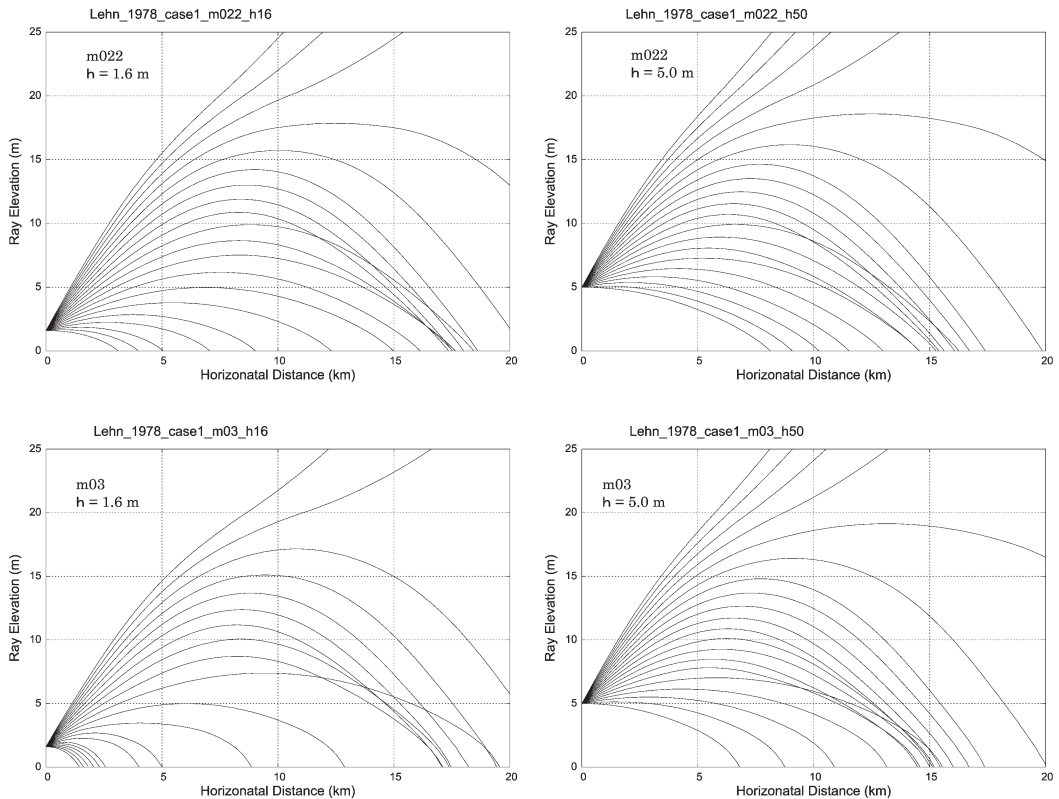
違いは 5 m 以下であるが、曲率半径は高さ微分が効いてくるので、曲率半径の違いは地表から 10 m 付近まで伸びている。その区間で lm03 の曲率半径は lm022 の曲率半径を 10 m の値を固定して上に縮めたようなプロファイルになっており、5 m より下層では lm03 の値が小さく、高度 3 m 以下ではおおよそ半分になっている。その反面、lm03 は 7.5 m で lm022 より大きくかつ極大値を取っている。

出射高度が 1.6, 5 m の 2 つの場合の軌跡を第 9 図に示す。高い出射高度 5 m の方が全反射を生じる距離が短くなり、高度 10~15 m で 2 km 程度の差があり、結果として地表付近で軌跡が交差する際の距離も短くなっている。1.6 m の出射高度において lm03 は負の仰角や小さい正の仰角のレイは大きく下に曲げられて (特に 3 m 以下で顕著)、到達距離は lm022 より短い。これは曲率半径が地表から約 3 m の間で lm03 が lm022 の半分と小さくなっていることによる。5 m 出射高度のレイは lm03 において数 m の高度範囲で

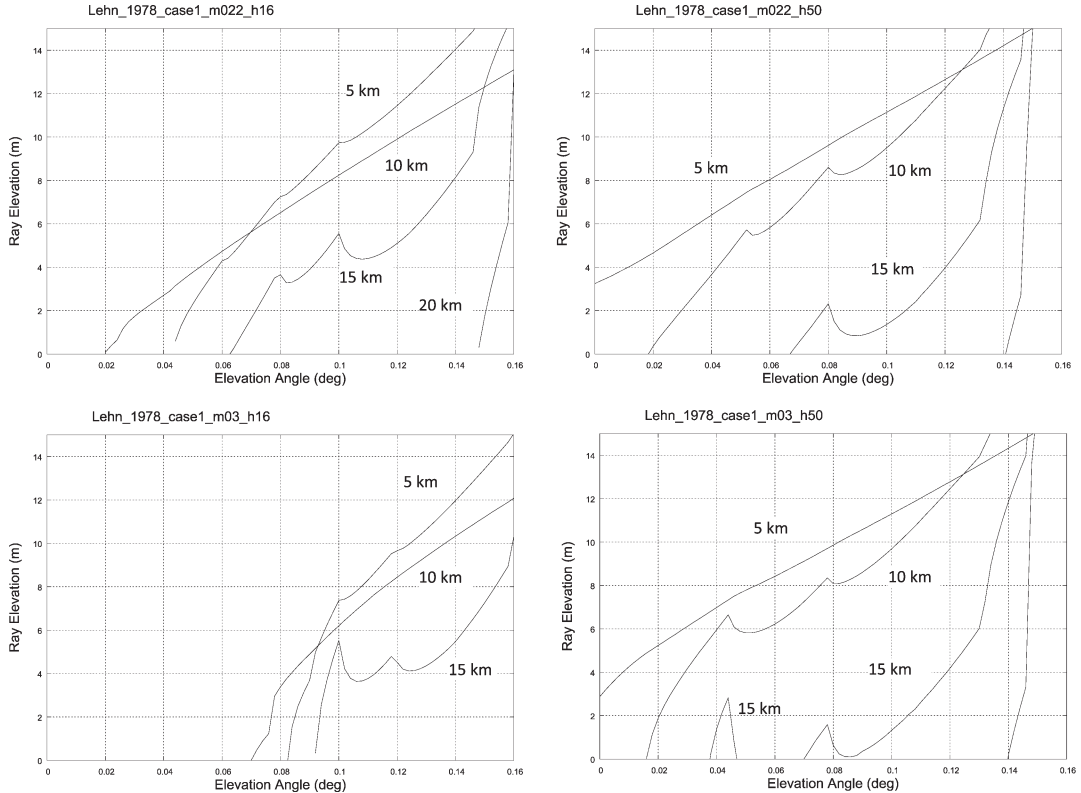
m022 に比べて曲率半径の変化が大きいため、軌跡は僅かの仰角の違いで大きく変化していて、15 km 付近のそれぞれの軌跡は複雑に交差している。5 km 毎の特性曲線 (第 10 図) を描くと 10, 15 km の距離である高度に対していずれも多価関数になっており蜃気楼の虚像が見えることを示している。

特性曲線が高度の多価関数の場合に物体がどう見えるかを模式的に示したのが第 11 図である。特性曲線は高度 H_1 と仰角 $\theta_1, \theta_4, \theta_5$ 、高度 H_2 は $\theta_2, \theta_3, \theta_6$ と交点を持ち、高度 H_1 と H_2 の間にある物体は 2 つの正立像 ($\theta_6 - \theta_5, \theta_2 - \theta_1$) と 1 つの倒立像 ($\theta_4 - \theta_3$) の計 3 つの像を結ぶ。つまり、対象が高度 H_1 と H_2 の間にあった場合に観測者は下から仰角 $\theta_2 - \theta_1$ の範囲に正立像、 $\theta_4 - \theta_3$ の範囲に倒立像、 $\theta_6 - \theta_5$ の範囲に正立像を見ることになる。

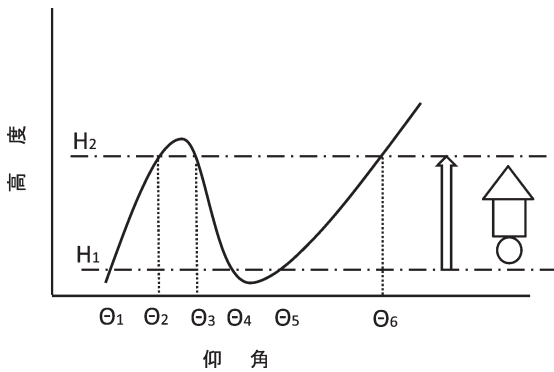
像の大きさは特性曲線の傾きで与えられ、その値が大きいほど像が縮む。特性曲線の極値の仰角は近似的な鏡面対称線に相当し、極大値では正立像の上に倒立



第 9 図 第 8 図に対応するレイ・トレーシング。(左) 出射高度 1.6 m, (右) 出射高度 5.0 m, (上) m022, (下) m03.



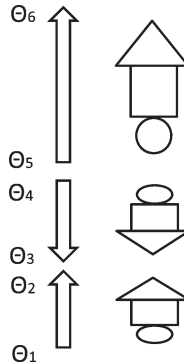
第10図 第9図の軌跡に対応する特性曲線（5, 10, 15, 20 km）.



第11図 ある距離における仰角-高度の特性曲線，物体の高度，眼に映る像の関係.

像，極小値では倒立像の上に正立像が見える。交点が多くなると像も多くなる。ただし，正立像が複数あるときはどれが実像かの判断が難しい場合があり，蜃気楼が無い場合の仰角に近いのを実像とするのが妥当であろう。

第10図について言うと，例えば 5 m 出射高度の



lm022（以後 lm022_h50 と記し，他も同じように記す）で距離 15 km の 1 ~ 2.2 m の高度の物は正立像（角度 0.09 ~ 0.11 度），倒立像（0.08 ~ 0.09 度），正立像（角度 0.07 ~ 0.08 度）の 3 つに見え，一番上の正立像は高さ範囲が最大である。距離 10 km でも小さな蜃気楼が起こりえるが，多価関数になっている高さ 6, 8 m 付近に物体

が必要である。lm03_h50 では距離 15 km にある約 1.6 m 以下の物体は 5 つの像を結び，下の 2 つと上の 3 つは間が開いている。これは 2013 年 1 月 12 日の風蓮湖の蜃気楼と定性的には良く似ている。しかし，詳細に見ると異なっている。模式図（第 2 図）にある下位蜃気楼の鏡面对称の線は湖上の野鳥に対してであって，

その右の像の走古丹の家屋（8 km）は実像の下にあるのは倒立虚像だけのようである。湖上の野鳥と家屋は水平距離が異なっているため、見え方が異なっているが不思議ではない。つまり、家屋の下位蜃気楼の像は1つで、そこにより近い距離の下位蜃気楼（野鳥に示される）が重なっているのである。同じように、模式図には無いが、左の遠い距離の製氷工場の建物（約18 km）の上位蜃気楼には鏡面对称線が4本認められ、下位蜃気楼は1つであり、複雑な特性曲線であることが推定できる。

第10図の5 m 出射高度の2つの場合について特性曲線を比較すると定性的には良く似ているが、15 kmの低い仰角（ ~ 0.04 度）の Δ 字形がlm03にはあるがlm022にはないことが大きく異なっている。これには正の仰角のレイに対してlm03には曲率半径の極大値が出射高度より高い7.5 mにあるが、lm022においては曲率半径が出射高度5 mで極大値となり高度とともに減少していることに関係している。つまり、曲率半径に極大値が存在しても、その高度より出射高度が高ければ、または両者が一致すれば、上向き出射のレイにとって極大値が存在しないことになる。lm03では低層で全反射される小さい仰角のレイのうち曲率半径極大付近を通るものはあまり曲げられず遠くまで到達し（第9図）、他のレイと併せて小さな仰角の Δ 字形の特性曲線を形成する。これは大きな仰角の特性曲線と離れて存在することができる。同じことはlm022でも1.6 m 出射高度のレイはこの条件（曲率半径の極大値高度は出射高度より高い5 mにある）を満たし、ある距離（18 km 付近）でlm03_h50の15 kmと似た特性曲線を示し、低い仰角で Δ 字形が離れて存在する（図略）。

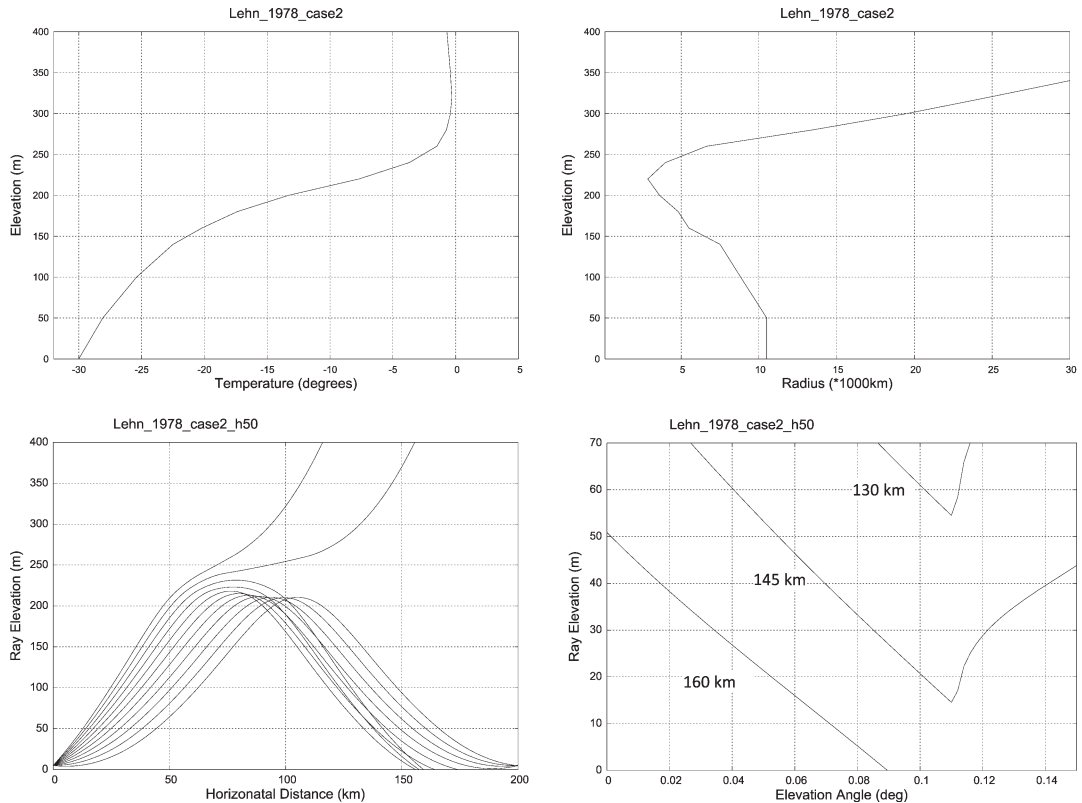
4.3 温度プロファイルと屈折率・曲率の関係

曲率半径の極値がレイの伝播に、故に蜃気楼にも、大きな影響を及ぼしていることは前述の通りであり、これらの高さや大きさを規定しているのは余屈折率のプロファイルである。(2a, b)式より曲率の極値の高度は余屈折率の2階の微分がゼロの点、つまり変曲点、の高度である。余屈折率のプロファイルから変曲点を定性的に見つけるには傾きの変化（2階の微分）が符号を変える高度を探せばよく、第8図では5 m (m022プロファイル)、7.5 m (m03) で正から負、15 m で負から正に変化しており、前者は曲率の極小（曲率半径は極大）、後者は極大（曲率半径は極小）に対応する。(3)式より余屈折率は密度に比例し、密度

変化は温度変化の符号を変えたものとおけるので（高度の1次の近似では(6)式の変分）、温度の変曲点が余屈折率の変曲点と一致する。第8図の温度プロファイルを見ると、確かに5, 7.5, 15 m で1階の微分が符号を変えており変曲点になっている。つまり、温度が下に凸から上に凸に変わる変曲点では曲率は極小値（曲率半径は極大値）、逆に上に凸から下に凸に変わる変曲点で曲率は極大値（曲率半径は極小値）になっている。以上のことから温度プロファイルの変曲点は蜃気楼と密接に関わっていることがわかる（Fraser and Mach 1976）。

これを2012年2月14日のような下位蜃気楼のみがある場合、もしくは2013年1月12日の湖上の野鳥の下位蜃気楼の場合の例に適応して下位蜃気楼を説明してみる。その時の温度プロファイルは未知であるが、特性曲線が地表付近でU字形もしくはV字形になれば下位蜃気楼になるのであるから、寒冷地でそれを再現する温度プロファイルがあることを示せばある程度の手がかりになる。ここではLehn and El-Arini (1978)のcase 2の接地逆転層の温度構造を使う。この接地安定層は深く強い（高さ：250~300 m、温度差：約30°C）が、この程度の接地安定層は極域でしばしば観測されている（Lehn and El-Arini 1978）。第12図に温度、曲率半径をレイの軌跡とともに示す。温度プロファイルから温度が上に凸から下に凸に変わる変曲点は220 m 付近にありそこに曲率半径の極小値があることが見て取れる。定量的な評価には実際の計算が必要であり、それによると高度150~260 mの間で曲率半径が地球半径より小さくなっている。

レイ・トレーシングを行うと小さな仰角のレイ群は220 m 付近の曲率半径極小層で全反射され、約100 kmより遠い距離で仰角と高度の関係が反転し、大きい仰角のレイが小さい仰角のレイより高度が低くなる。その結果、これらのレイは倒立像を形成する。さらに、もう少し大きな仰角のレイ群が曲率半径極小層の高度（220 m 付近）より少し高い高度（230 m 付近）で全反射されるがそんなに大きく曲げられず、仰角と高度の関係が反転しないで曲率半径極小層による全反射のレイ群と交差し、正立像を形成する（この仰角と高度の関係が反転しない全反射の様子は第5図で示されている）。特性曲線は130 km ではV字形が高度55 m、145 km でそれが高度15 m 付近まで降りるが、160 km では正立像のレイが到達しないのでVの右側がなく倒立像のみである。この例では風蓮湖の



第12図 極域でしばしば観測される深く強い接地安定層の温度プロファイル (Lehn and El-Arini 1978) と曲率半径, 軌跡, 特性曲線 (距離: 130, 145, 160 km)。

2012年2月14日の近距離 (~10 km) の非常に低い下位蜃気楼より高度が高すぎるが, ともかくも上暖下冷の温度構造でも下位蜃気楼を作っている。もっとも, そんなに長い視程は可能なのかという疑問は生じるが, 気温が非常に低く大気の透明度が高いので実現不可能というわけではない。この例から, 逆転層の高さを低くすれば (それに応じて強度も変化させる), 近距離の低い高度の物体に対しても同様な屈折 (全反射) が起こり, 曲率半径極小層による倒立像とその少し上の層による正立像が生じる下位蜃気楼は可能であろう。

5. 蜃気楼から温度プロファイル推定の可能性

レイ・トレーシングはいわゆる順問題であり, 逆問題を解けば温度構造が求まる可能性がある。最低限, 任意の高度の気温が与えられれば, 先験情報を付加しての気温減率の推定となる。その際, 観測情報が多いほどパラメータ推定の誤差範囲は小さくなるので, 1

つの距離の1つの虚像の蜃気楼より多像の蜃気楼や異なった距離の虚像がある蜃気楼を使うのが有利であろう。この意味で2013年1月12日の風蓮湖の蜃気楼は興味深いものである。距離がほとんど同じ場合でも, 2008年6月23日の小樽の多像の蜃気楼は虚像の上の風車は実像のみであるという束縛条件を付加できるなど, 蜃気楼の虚像のない物体も使える場合がある。

逆問題を解かなくても順問題を多数行うモンテカルロ法的な推定も可能である。木下・市瀬 (2002) は接地等温層とその上の等温層とのギャップ, 温度逆転の幅をこの方法で推定している。しかし, 温度プロファイルの観測データがないので検証はできていない。逆問題にせよモンテカルロ法にせよ, 観測値が無い状況ではまずレイ・トレーシングに使った温度プロファイルを特性曲線からどの程度再現できるかのシミュレーションによる検証が必要であろう。

6. まとめ

2013年1月12日の厳冬期の凍結した風蓮湖ごしに観測された距離10~20 kmの範囲に1つの虚像の下位蜃気楼と数個の虚像の上位蜃気楼の両方を持つ蜃気楼について安定成層の温度プロファイルを変換してレイ・トレーシングを行い、観測された蜃気楼の定性的な再現を試みた。折れ線的な安定成層の温度プロファイルでは曲率半径が階段関数的に変化し、蜃気楼の再現はできなかった。滑らかな温度プロファイルの安定成層では曲率半径が極小値を持つため蜃気楼を再現できた。温度が下に凸から上に凸に変わる変曲点で曲率半径は極大、逆に上に凸から下に凸に変わる変曲点で曲率半径は極小になる。曲率半径が極大層の上に近接して極小層を持つとき、その近辺の屈折による光が蜃気楼を形成し、極大層でそれほど曲げられなかった小さい出射仰角のレイがその上層の極小層で大きく曲げられた大きな出射仰角のレイと交差する距離では多像になることがわかった。さらに、同じく厳冬期の2012年2月14日に風蓮湖ごしに下位蜃気楼のみがある場合も定性的に再現することができた。曲率半径の極小層による全反射が倒立の虚像を作り、その少し上の層による全反射が正立の実像を形成する。

複数の距離で複数の虚像を示す蜃気楼は情報量が多いので、逆問題を解くには有利であり、温度構造が得られる可能性についても言及した。

謝辞

風蓮湖の蜃気楼の写真の提供して下さった長尾康氏、その模式図の使用を承諾して下さった毎日新聞社に感謝します。また、大鐘卓哉氏には小樽の蜃気楼の写真の提供やいろいろなアドバイスを受けました。感謝しております。

参考文献

- Ciddor, P. E., 1996: Refractive index of air: new equations for the visible and near infrared. *Appl. Opt.*, **35**, 1566-1573.
- Fraser, A. B. and W. H. Mach, 1976: Mirages. *Sci. Amer.*, **234**(1), 102-111. (小口 高訳, 1984: 蜃気楼はどうして起きるのか, 日経サイエンス, 64pp.)
- Greenler, R., 1980: Rainbows, Halos, and Glories. Cambridge University Press, 195pp. (小口 高・渡邊 堯共訳, 1992: 太陽からの贈り物一虹, ハロ, 光輪, 蜃気楼. 丸善, 237pp.)
- 川上紳一, 東條文治, 2003: 北緯65度25分ロシア白海における夏至の日に蜃気楼で沈まなかった太陽. *天気*, **50**, 829-830.
- 川上紳一, 東條文治, 2004: ロシア白海における蜃気楼の高度変化. *天気*, **51**, 505-506.
- 木下正博, 市瀬和義, 2002: 富山湾における上位蜃気楼の発生理由一気温の鉛直分布が示す新たな事実一. *天気*, **49**, 57-66.
- 北日本新聞社, 1981: 蜃気楼有情. 北日本新聞出版部, 176pp.
- Kroppla, W. C. and W. H. Lehn, 1992: Differential geometric approach to atmospheric refraction. *J. Opt. Soc. Amer.*, **9**, 601-608.
- Lehn, W. H., 1985: A simple parabolic model for the optics of the atmospheric surface layer. *Appl. Math. Model.*, **9**, 447-453.
- Lehn, W. H. and M. B. El-Arini, 1978: Computer-graphics analysis of atmospheric refraction. *Appl. Opt.*, **17**, 3146-3151.
- Lehn, W. H. and B. A. German, 1981: Novaya Zemlya effect: analysis of an observation. *Appl. Opt.*, **20**, 2043-2047.
- 中川達朗, 2009: 魚津(富山県)における春型蜃気楼発生の気象特性. *天気*, **56**, 939-943.
- 大鐘卓哉, 金子和真, 2009: 石狩湾における2008年の上位蜃気楼. 細水, (55), 33-34.
- 柴田清孝, 1999: 光の気象学. 朝倉書店, 182pp.

Multi-image Mirage through Stably Stratified Atmosphere: Ray Tracing and Possibility of Retrieving Temperature Profile

Kiyotaka SHIBATA*

* *Meteorological Research Institute, 1-1 Nagamine, Tsukuba, Ibaraki 305-0052, Japan.*

(Received 1 April 2013; Accepted 5 July 2013)

Abstract

In January 12th, 2013 very rare mirages, which comprised of one inferior inverted mirage and several superior inverted and erect mirages, were observed in 10-20 km distance over frozen Huhren Lake in Nemuro province, Hokkaido. To reproduce this mirage, using very stable temperature profiles, ray tracing was performed and qualitatively successful results can be obtained. It is found that the minimum region of the radius of curvature causes totally internal reflection for rays emitted near the Earth's surface and these rays form mirages. When there is a maximum region below the minimum region, rays reflected in this maximum region travel to far distance and overlap with those reflected in the minimum region, resulting in multi-image mirage in a certain distance range. Inferior mirage with a single image is also reproduced through the totally internal reflection in a stable condition. The extremum altitude of the radius of curvature coincides with the inflection altitude of temperature, and the inflection altitude from convex downward to convex upward corresponds to the altitude of a maximum radius of curvature in a stable atmosphere. Conversely, the inflection altitude from convex upward to convex downward corresponds to the altitude of a minimum radius of curvature. Further, multi-image mirages include more information of atmospheric thermal condition than single-image mirages and thereby the possibility of retrieving temperature profile through solving the inverse problem is also discussed.
