コリオリ力の「ユリイカ」一つの試み

山　岸　米二郎*

1．はじめに

吉崎（2013）はコリオリ力の説明方法を幾つかまとめて紹介し，分かりやすく解説している．筆者も一つの試みを示す．

コリオリ力の説明には二つの段階がある．最初は慣性系からみた加速度と慣性系に対して回転（自転）している地球に固定した座標系（以下地球座標系）でみた運動（以下相対運動）の関係を示す式を導くことである．この関係式から，地球座標系でみた運動にも遠心力とコリオリ力という二つの見掛けの力を導入すれば，ニュートンの運動の第2法則を用い得ることが示される．

次の段階は，具体的な運動についてコリオリ力が働いていることを例示し，コリオリ力の理解を深めることである．

コリオリ力そのものはすでに第1段階の数式で得られているから，第2段階では，‘分かった’と思っていただくような解説が主目的となる．

吉崎（2013）と中村（2013）は慣性系における等速度運動を例として取り上げ，これを地球座標系で表した時に生じる加速度から，コリオリの力を解説している．

筆者は逆に等速度相対運動を慣性系で見た場合に生じる加速度からコリオリの力を解説することを試みた．

2．二つの異なるアプローチ

最初にベクトル演算で見掛けの力を導入して，二つの説明方法の違いを確認する．以下地球は球形と仮定する．

回転地球上の式の導出の詳しい説明は気象力学の教科書，例えば小倉（1978）のｐ7～ｐ8を参照していただくとし，ここでは概略を説明する．

地球上の点Ｐの地球中心からの位置ベクトルを$\mathbf{R}$とすると，慣性系でみた点Ｐの速度（絶対速度）は，$\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}$で表される．ここで$\mathbf{\Omega}$は地球自転の角速度ベクトルである．物体Ｑが点Ｐにあって相対速度$\mathbf{v}_\mathrm{r}$で運動しているとすると，物体Ｑの絶対速度$\mathbf{v}_\mathrm{a}$は，相対速度$\mathbf{v}_\mathrm{r}$と点Ｐの絶対速度との和だから

$$\mathbf{v}_\mathrm{a}=\mathbf{v}_\mathrm{r}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R} \qquad (1)$$

下付き添え字，a，r はそれぞれ慣性系と地球座標系の値を示す．

ここで，$\mathbf{v}_\mathrm{a}=(d\mathbf{R}/dt)_\mathrm{a}$，$\mathbf{v}_\mathrm{r}=(d\mathbf{R}/dt)_\mathrm{r}$ だから式(1)は

$$(d\mathbf{R}/dt)_\mathrm{a}=(d\mathbf{R}/dt)_\mathrm{r}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R} \qquad (2)$$

とも表せる．式(2)は任意のベクトルの時間微分について成立する．式(2)の$\mathbf{R}$に式(1)の$\mathbf{v}_\mathrm{a}$を代入し，左辺は$\mathbf{v}_\mathrm{a}$をそのまま残し，右辺の$\mathbf{v}_\mathrm{a}$を式(1)の関係を用いて書き直して整理すると，

$$(d\mathbf{v}_\mathrm{a}/dt)_\mathrm{a}=(d\mathbf{v}_\mathrm{r}/dt)_\mathrm{r} + \mathbf{\Omega}\times(\underline{(d\mathbf{R}/dt)_\mathrm{r}}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R})+\underline{\underline{\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}_\mathrm{r}}} \qquad (3)$$

すなわち

$$(d\mathbf{v}_\mathrm{a}/dt)_\mathrm{a}=(d\mathbf{v}_\mathrm{r}/dt)_\mathrm{r}-(\Omega^2\mathbf{R}-2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}_\mathrm{r}) \qquad (4)$$

式(4)がはじめに述べた，慣性系の加速度と地球座標系で見た運動の関係を示す式である．式(3)の下線は後で述べる．

力を$\mathbf{F}$とすると，ニュートンの運動の第2法則から単位質量について

$$\mathbf{F}=(d\mathbf{v}_\mathrm{a}/dt)_\mathrm{a} \qquad (5)$$

だから，式(4)で相対運動の加速度を左辺に移行すると，

* Yonejiro YAMAGISHI.
Email：y-yamagisi@jcom.home.ne.jp

$$(d\mathbf{v}_r/dt)_r=\mathbf{F}+(\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{R}-2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_r) \tag{6}$$

式(6)は，右辺の（　）内の二つの項を見掛けの力として付け加えれば，相対運動にもニュートンの運動の第2法則を適用できることを示している．見掛けの力は地球の自転により慣性系に生じる加速度の符号を変えたものである．

（　）内第1項が遠心力，第2項がコリオリ力と呼ばれる．本稿はコリオリ力の解説なので，以後は遠心力を省略する．

吉崎（2013）と中村（2013）は慣性系で等速度で動く物体が，地球の自転軸の上あるいは近傍を通る運動を仮定してコリオリ力を解説した．すなわち式(6)で$\mathbf{F}=0$．

$$(d\mathbf{v}_r/dt)_r=-2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_r \tag{7}$$

慣性系の等速度運動を自転する地球上で見ると曲線運動となる．この場合は，力が働いていないのに，加速度運動が生じるのは見掛けの力が働くからであると理解する．この相対運動の加速度を求めると，式(7)のコリオリ力に等しい加速度が得られる．吉崎（2013）は数式で示し，中村（2013）は幾何学的手法で図示して分かりやすく解説している．

筆者は地球座標系での等速度運動を例として用いる．式(6)で$(d\mathbf{v}_r/dt)_r=0$なので

$$\mathbf{F}-2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_r=0 \tag{8}$$

式(8)は，大きさが力と同じで向きが反対の見掛けの力が作用すれば，力が働いても地球座標系で加速度のない運動となることを示している†．

地球座標系の等速度運動を慣性系で見たときの加速度が式(8)のコリオリ力と同じ大きさであることを示すのが筆者の説明方法である．

慣性系の等速度運動でコリオリ力を説明する場合は，北極点の接平面内の運動を考察するので直感的に分かりやすい．但し極から離れた任意の地点でこの方法を適用するのは困難である．

一方地球上の等速度運動を用いる場合は，任意の点で考察できる．両者の方法に本質的な違いはないが異なる説明方法に接することが「ユリイカ」に達する手助けになることを期待したい．

† 力$\mathbf{F}$が気圧傾度力だけの場合は，式(8)は地衡風の関係である．

3．等速度相対運動を慣性系で見たときの加速度

最初に等速度相対運動で慣性系に加速度が生じる理由を考察する．式(3)によればコリオリ力は下線を付した，大きさの等しい二つの項の和から生じている．二つの項の運動学的意義は以下のように説明される（Eliassen and Pedersen 1977）．

①相対運動により，物体Qは初めの位置とは異なる点に移動する．地球上の異なる2点は自転による絶対速度が異なるので，位置の移動により慣性系でみた加速度が生じる．式(3)の下線の項，$\boldsymbol{\Omega}\times(d\mathbf{R}/dt)_r$．

②等速度相対運動でも，地球の自転により，慣性系で見れば運動の方向が変わり，加速度運動となる．式(3)の2重下線の項，$\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_r$．

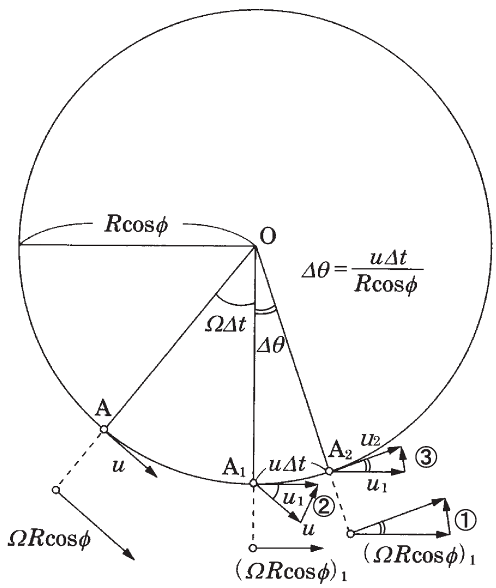
入門書では，（数学の学習レベルの配慮と思われるが）ベクトル演算による関係式の導出は用いられていないので，式(3)を参照することはできない．しかし①，②の説明は式なしでも充分分かりやすく納得していただけるだろう．以下に山岸（2011）から第1図，第2図を引用して説明する．

図では物体Qは時刻tに地球上の点A（緯度ϕ）にあって，一定の相対速度$\mathbf{v}_r$（東向き成分uと北向き成分v）で水平運動しているとし，慣性系でみたQとAの初期および微小時間Δt後の位置が示されている．自転軸に平行な運動にはコリオリ力が働かないから，緯度ϕを通り，赤道面に平行な半径$R\cos\phi$の円形平面（以下赤道平面）の運動で扱っている．

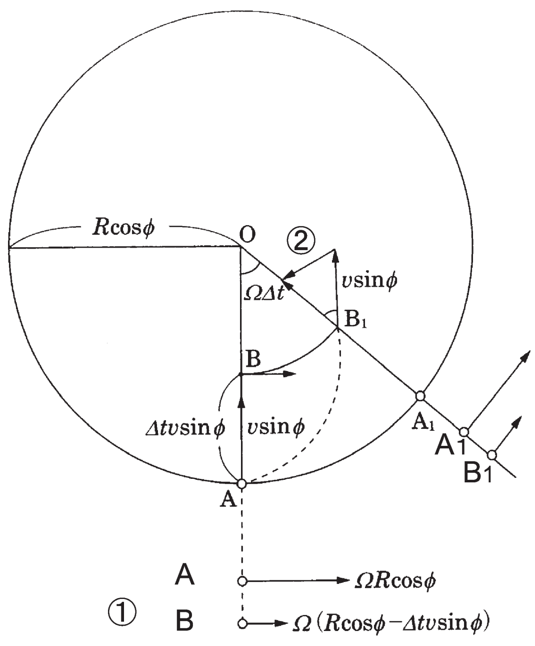
図を見やすくするため，微小時間Δtの間の赤道平面の回転角度$\Omega\Delta t$や物体Qの相対速度による移動距離が強調して描いてあり，図は正確さを欠く．但し①と②の理由による慣性系の加速度を求めるときはΔtを0に近づける極限で考えるので，図の表現の不正確さは了解されたい．

第1図は物体Qが速さuで東向きに運動する場合である．微小時間Δtで赤道平面は角度$\Omega\Delta t$だけ回転する．点Aは慣性系でみて$\Omega R\cos\phi$の速さで東向きに運動して点A_1に達している．物体Qは慣性系に対し$\Omega R\cos\phi+u$の速さで運動するのでΔt時間後には赤道平面の円弧に沿ってA_1から$u\Delta t$だけ東に進んだ点A_2に達している．

$u\Delta t$が地球座標系に対するQの移動距離で，弧A_1OA_2が自転軸に張る微小角度は$\Delta\theta=u\Delta t/R\cos\phi$である．図の下側には点A，$A_1$，$A_2$における速度ベクトル$R\cos\phi$と$u$の向き及び①と②の理由による加速度を求めるための，それぞれのベクトル和も示されてい



第１図　緯度線に平行な運動の場合．その他の説明は本文参照（山岸（2011）の図３.11を一部修正）．



第２図　経度線に平行な運動の場合．その他の説明は本文参照（山岸（2011）の図３.10を一部修正）．

る．

はじめに①の理由による加速度を求める．点 A_1 と A_2 の位置の違いによる慣性系に対する速度差は $\varOmega R\cos\phi$（$\varDelta\theta$）$=\varOmega R\cos\phi$（$u\varDelta t/R\cos\phi$）$=\varOmega u\varDelta t$．$\varDelta t$ を０に近づけると（以後この断りを省略），加速度の大きさは $\varOmega u$ で自転軸（O）方向を向く．

次に②の理由による加速度を求める．慣性系に対する物体Ｑの運動を点 $\mathrm{A}\to\mathrm{A}_1$，点 $\mathrm{A}_1\to\mathrm{A}_2$ に分ける．前者の運動で物体Ｑは自転する地球とともに移動して速度ベクトルの向きが変わるので加速度が生じる．これが理由②による加速度である．ベクトル $\mathbf{u}$ は角度 $\varOmega\varDelta t$ だけ左向きに回転し，速度差 $u\varOmega\varDelta t$ が生じる．これによる加速度は $\varOmega u$ で自転軸方向を向く．

A_1 から A_2 への移動は地球の自転と関係ないのでコリオリ力は生じない．ベクトル $\mathbf{u}$ は $\varDelta\theta=(u\varDelta t/R\cos\phi)$ だけ左向きに回転し，速度差 $u\varDelta\theta=(u^2\varDelta t/R\cos\phi)$ が生じる．これによる加速度は $u^2/R\cos\phi$ で自転軸方向を向く．図中に③として示した．この加速度は物体Ｑが赤道平面の円弧に沿って速さ u で等速円運動をすることで生じる向心加速度である．

理由①と②による加速度は大きさと向きが等しいので，二つを合わせると慣性系では大きさ $2\varOmega u$ で自転軸方向を向く加速度が生じている．コリオリ力は加速度と反対符号だから，$2\varOmega u$ の大きさで自転軸と反対方向，すなわち赤道平面内で運動方向に垂直右向きに働く．点Ａでの接平面内では，水平方向には運動方向に垂直右向き（南向き）に $2\varOmega u\sin\phi$，鉛直上向きに $2\varOmega u\cos\phi$ となる．

第２図は北向きに速さ v で運動する場合である．球面に沿って $v\varDelta t$ だけ移動したときの赤道平面内の移動距離は，$(R\cos\phi)-R\cos(\phi+v\varDelta t/R)$．
三角関数の公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を用いて上式第２項を展開すると，$v\varDelta t/R\ll 1$ なので，$\cos(v\varDelta t/R)\to 1$，$\sin(v\varDelta t/R)\to v\varDelta t/R$ と近似できて，赤道平面内の移動距離は $\varDelta tv\sin\phi$ となる．そこで v を赤道平面に平行な等速運動 $v\sin\phi$ と赤道平面に垂直な運動に分ける．自転軸に平行な運動にはコリオリ力が働かないので，赤道平面内の運動で慣性系の加速度を調べることができる．

時刻 t でＡにあった物体Ｑは，微小時間 $\varDelta t$ 後に $\varDelta tv\sin\phi$ だけ自転軸方向に進み点Ｂに達する．赤道平面は $\varDelta t$ 時間の間に慣性系に対して $\varOmega\varDelta t$ だけ回転

し，点ＡとＢはそれぞれ慣性系に対して点 A_1 と B_1 に移動する．物体Ｑは点 B_1 に移動して自転軸方向（北向き）に速度 $v\sin\phi$ で運動している．

はじめに理由①による加速度を求める．図の下側に示されているように点ＡとＢの地球自転による絶対速度ベクトルはそれぞれ東向きに $\Omega R\cos\phi$ と $\Omega(R\cos\phi-\Delta tv\sin\phi)$ だから，その差は $\Omega R\cos\phi-\Omega(R\cos\phi-\Delta tv\sin\phi)=-\Omega\Delta tv\sin\phi$ で西向きである．従って物体ＱのＡからＢへの移動による地球上の位置の違いにより，慣性系では $-\Omega v\sin\phi$ の加速度が生じる．向きは西向き，すなわち速度 $v\sin\phi$ に対して垂直左向きである．

次に②の理由による加速度を調べる．物体Ｑは地球上では点ＡからＢ（A_1 から B_1）まで直線で進むが，慣性系でみると図の破線に沿ってＡから B_1 まで曲線で進む．この間に速度ベクトル $v\sin\phi$ は，向きが $\Omega\Delta t$ だけ左向きに回転し，速度差 $\Delta t\Omega v\sin\phi$ が生じる（図の②のベクトル）．これによる加速度は，大きさが $\Omega v\sin\phi$ で，速度 $v\sin\phi$ に垂直左向きである．理由①と②の加速度の向きと大きさが等しいので，二つ合わせると慣性系では大きさが $2\Omega v\sin\phi$ で運動方向に垂直左向きの加速度が生じている．コリオリ力は慣性系の加速度と反対符号だから，点Ａにあって速さ v で北向きに運動している時は点Ａの接平面内で，大きさ $2\Omega v\sin\phi$ のコリオリ力が運動方向に垂直右向きに働く．

ここでは分かりやすいように地球上の等速運動を仮定して慣性系の加速度を求めた．しかし，第１図，第２図の説明は，等速運動でない場合にも適用できる．

式(8)ではコリオリ力は $\mathbf{\Omega}$ と速度 $\mathbf{v}_r$ のベクトル積の形で示されている．緯度を ϕ とし，$\mathbf{v}_r$ の東向き成分と北向き成分をそれぞれ u，v としてベクトル積を求めると，第１図，第２図で得られた $2\Omega u$，$2\Omega v\sin\phi$ に等しくなることは読者で確認されたい．

謝　辞

立平良三氏との議論が筆者の説明方法を試みる端緒となった．今回の原稿にも貴重なコメントをいただいた．お礼申し上げます．レフリーのコメントは改稿に大変役立った．感謝致します．

参 考 文 献

Eliassen, A. and K. Pedersen, 1977: Meteorology: An Introductory Course. Volume 1: Physical Processes and Motion. Universitetsforlaget, 204pp.

中村晃三，2013：コリオリ力の「ユリイカ」を読んで．天気，60，475-477．

小倉義光，1978：気象力学通論．東京大学出版会，249 pp．

山岸米二郎，2011：気象学入門，天気図からわかる気象の仕組み．オーム社，234pp．

吉崎正憲，2013：コリオリ力の「ユリイカ」．天気，60，119-124．