気象のABC
—No. 35

ローレンツ・カオスの理解の仕方

吉　崎　正　憲*

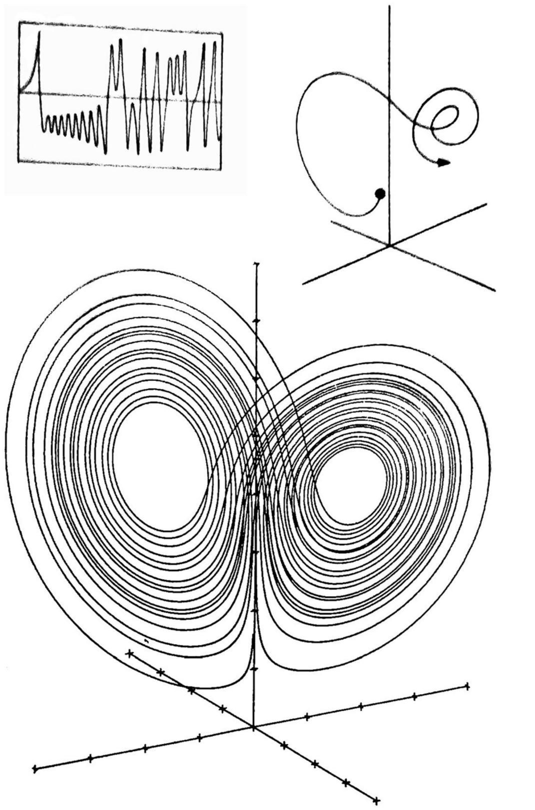
1．はじめに

カオスという言葉はいまや世の中に氾濫していて，読者はその概念についてある程度の知識はあると思う．たとえば，Gleick（1987）では，簡単な非線型な数式を使いながら，ローレンツ・カオスをはじめその中に現れる様々なカオスを議論している．またインターネットでも（ローレンツ）カオスの説明がいろいろなされている．インターネットでは，例えば，ローレンツ・カオス，ローレンツ・アトラクター，バタフライ効果などを検索してほしい．少々長いが，いくつか組み合わせたものを紹介する．“非線型方程式の時間発展では，初期値次第でその後の解の振舞いが大いに変わる．そのため，天気予報などではアンサンブル予報など初期値をさまざま変えてその統計的なもっともらしい予報が使われている．Lorenzの論文はそのきっかけを与えたもので，その典型が「バタフライ効果」である．これは，1972年にLorenzがアメリカ科学振興協会でおこなった講演のタイトル『予測可能性-ブラジルでの蝶の羽ばたきはテキサスでトルネードを引き起こすか』に由来する．ごく小さな擾乱でも別の場所に気候変動など大きく影響を与えるかも知れないということであり，バタフライ効果は，「カオスな系では，初期条件のわずかな差が時間とともに拡大して，結果に大きな違いをもたらす．そしてそれは予測不可能」ということの詩的表現である．そうしたことから人生観や世界観を語る中で用いられることがあり，例えば，『JIN―仁―』（2009年秋にTBS系で放映されたテレビドラマで2013年正月に再放送された）では，タイムスリップした主人公は自らの行為が先の歴史に与えてしまう影響について葛藤するが，その際のキーワードとして登場する．”

ここで出てくるローレンツ・カオスは，もともとは気象学における対流をもとにした研究から生まれた．Lorenz（1963）は非常に単純化した設定で乾燥大気における熱対流を扱い，そこで流れには「決定論的で非周期的」（deterministic nonperiodic）となる領域があることを示した．この意味は，方程式は陽に決定論的に与えられるが，出てくる解は非周期的なカオスということである．第1図（下）は，3方向を三つの変数モードの振幅としたときの運動の軌道である．図を見ると，カオスといってもあらゆる瞬間に不規則な運動をするわけではなく，ぐるぐる回る部分は規則的であり，左右の飛び移り（ジャンプ）が不規則さを生み出している．この軌道が二つの羽をもつ蝶のように見えることから，「バタフライ効果」という言葉が生まれたとも考えられる．

では，ローレンツ・カオスはどうして第1図のような運動をするのだろうか．本稿の目的は，こうした事情を直感的に読者に理解してもらうことにある．軌道の二重構造や二つの間のジャンプが物理的に必然であることが理解できれば，これまでカオス（あるいは乱流）は複雑であると思っている人にとって身近に感じられるだろう．本稿の構成は以下のとおりである．第2章では，対流の事始めとLorenzのモデル設定を眺めてカオスの発生までを解説する．第3章は，別の視点である保存量からの見方をのべる．第2章後半は実質Lorenz（1963）の日本語訳であるので，なじみの人は直接第3章に進んでもよい．第4章はまとめである．

* Masanori　YOSHIZAKI，立正大学地球環境学部．
yoshizaki@ris.ac.jp



第1図 (左上) 一つの変数の時系列. (右上) 3次元的に見た軌道の概念図. (下) $P=10$, $r=28$, $b=8/3$の場合の運動の軌道. P, r, b の定義は本文を参照 (Gleick 1987).

2. Lorenz のモデル設定とカオスの発生

対流研究の始まりは Bénard (1900) の室内実験であろう. プレート上の流体についての室内実験から, ①流体が静止した状態から対流が起こる状態へ変わるのに, ある一定以上の上下の温度差が必要である, ②実現する対流の横幅は流体層の厚みと同じ大きさである, という定量的な結果が得られた. この結果を理論的に示すために, Rayleigh (1916) は, 第2図aのような実験設定のもとに理想化された対流運動を考え数式化した. 2枚の平行板によって区切られた厚さh_*の流体層を考え, 平均温度 T_{0*}として, 下の板の温度を $T_{0*}+\Delta T_*/2$, 上の板の温度を $T_{0*}-\Delta T_*/2$ とし, 上下でΔT_*の温度差を一定とした. また流体の熱拡散係数 κ_*や粘性係数 ν_*は定数であり, そこでは相変化はないとした. ここで, 下付で$*$をつけた量は次元をもつ物理量を意味する. 簡単のために, 水平成分 x_*, 鉛直成分 z_*の2次元モデルを仮定する. 水平速度 u'_*, 鉛直速度 w'_*, 温度偏差 T'_*の式から, h_*, T_{0*}, ΔT_*, κ_*を用いて無次元化を行い (以下, 無次元量には$*$や$'$をつけない),

流線関数ϕ ($u=-\dfrac{\partial\phi}{\partial z}$, $w=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$) と

ヤコビアン$J(A, B)=\dfrac{\partial A}{\partial x}\dfrac{\partial B}{\partial z}-\dfrac{\partial A}{\partial z}\dfrac{\partial B}{\partial x}$ を使って,

(ϕ, T) に関する方程式系が得られる.

$$\left[P^{-1}\frac{\partial}{\partial t}-\nabla^2\right]\nabla^2\phi+P^{-1}J\left(\phi,\ \nabla^2\phi\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\nabla^2\right]T+J\left(\phi,\ T\right)-R\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \tag{2}$$

ここで, $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である.

二つの無次元量は以下のように定義される:

レーリー数 $R=\dfrac{g_*\Delta T_* h_*^3}{T_{0*}\kappa_*\nu_*}$, プラントル数 $P=\dfrac{\nu_*}{\kappa_*}$.

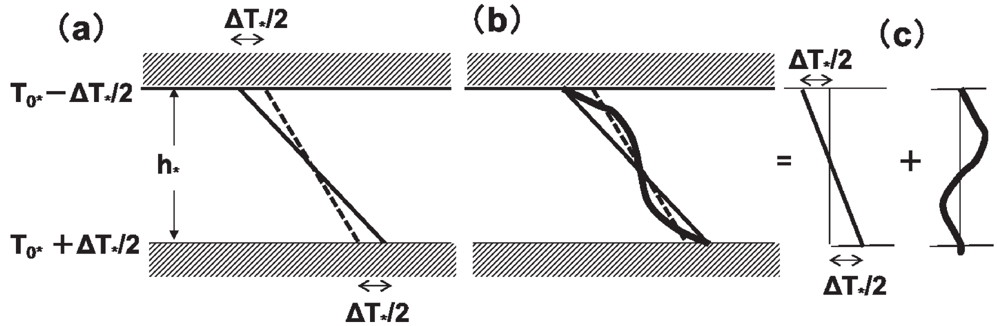
レーリー数は, 分子にΔT_*を含むことから不安定の大きさを表す量である. 一方, プラントル数は, 粘性係数と熱拡散係数の比であることから流体の物性を表す量である. この系は二つの無次元パラメータだけで支配される.

流体が静止した熱伝導解から流体の運動を表す対流解への遷移過程は, 擾乱の振幅が小さいとして式(1)と式(2)を線型化することにより知ることができる. Rayleigh (1916) は, 鉛直波数1のとき, 臨界レーリー数 R_1と臨界水平波数 a_1を求め, 特に境界条件として摩擦なし断熱の場合には, $R_1=27\pi^4/4\fallingdotseq 657$, $a_1=2^{1/2}\pi/2\fallingdotseq 2.22$であることを示した. つまり, 熱伝導解から対流解への遷移にはある臨界値があり, そのとき実現する対流解の縦横比はオーダー1であるということである. Bénard (1900) が室内実験で得た結果は, こうして Rayleigh (1916) によって理論的に示された(注).

Lorenz (1963) は, 2次元で摩擦なし断熱の境界条件と水平波数 a_1を用いて, 有限振幅の解が

$$\frac{\pi a_1}{\pi^2+a_1^2}\phi=\sqrt{2}\ X\sin(a_1x)\sin(\pi z) \tag{3}$$

$$\frac{\pi R}{R_1}T=\sqrt{2}\ Y\cos(a_1x)\sin(\pi z)-Z\sin(2\pi z) \tag{4}$$



第2図　(a) 横から見た対流実験の設定と温度分布．上の境界では温度を $T_{0*}-\Delta T_*/2$，下の境界では温度を $T_{0*}+\Delta T_*/2$，と固定した条件で運動がないときの温度分布．破線は臨界レーリー数 (R_1) の場合，実線はより不安定な成層にした仮想的な温度分布 ($R-R_1>0$)．(b) $R-R_1>0$ のときに実現する実際の温度分布 (太実線)．(c) $R-R_1>0$ のときに水平平均した温度分布を二つの鉛直成分に分けた場合．

と表されるとして，$R>R_1$ の対流解を調べた．ここで，水平波数の番号を k，鉛直波数の番号を n として対流解のモードを (k，n) と表すと，(1，1) の流れ成分の振幅を X，(1，1) の温度成分の振幅を Y，(0，2) の温度成分の振幅を Z とする解を想定した．この中で振幅 Z の符号はマイナスとしているが，この理由は以下の通りである．流体を下 (上) から加熱 (冷却) して不安定にすると，有限振幅の対流が起こり温度の鉛直移流により，元に比べて成層は安定化する．そのため，流体内部では水平平均した温度の鉛直傾度は0に近づくようになり，温度分布は第2図bとなる．$k=0$ の成分に関して，それを二つの鉛直成分に分けると，第2図cのように対流の不安定度を表す直線成分と波数2で近似される．波数2の振幅が Z であり，これまで述べた理屈によりその符号はマイナスとなる．

こうして (X，Y，Z) に関する3次元空間では，

(注) しばしば対流現象はベナール・レーリー対流と呼ばれる．しかし，この二つの対流の発生のメカニズムは異なることに注目する必要がある．Rayleigh が考えた対流では，その運動は熱が駆動している．一方，Bénard が室内実験で作り出した対流では，温度変化に応じて変わる表面張力がその運動を駆動している．対流の事始めとして，Bénard が室内実験を行いその説明のために Rayleigh が理論モデルを導出したことになっているが，実際には，Rayleigh の大きな勘違い，いや偉大な勘違いによって対流研究は大きく前進したと言って良いだろう．

$$\frac{dX}{dt'}=PY-PX \tag{5}$$

$$\frac{dY}{dt'}=-XZ+rX-Y \tag{6}$$

$$\frac{dZ}{dt'}=XY-bZ \tag{7}$$

とまとめられる．ここで，$t'=(\pi^2+a_1^2)\,t$，$r=R/R_1$，$b=4\pi^2/(\pi^2+a_1^2)$ であり，r が不安定度を表すパラメータである．さらに，

$$X=bq_1,\quad Y=\frac{b^2}{P}q_2,\quad Z=r-\frac{b^2}{P}q_4,$$

$$t'=\frac{1}{b}\tau,\quad \alpha=\frac{P}{b},\quad \beta=\frac{1}{b},\quad \varepsilon=r\frac{P}{b^2}$$

とおくと，式(5)～式(7)の方程式系は

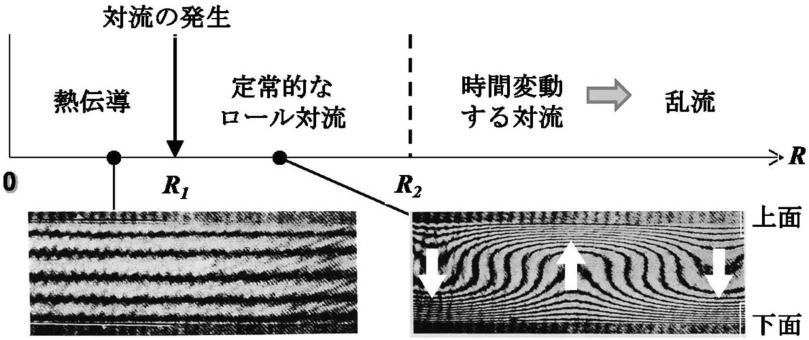
$$\dot{q}_1=-\alpha q_1+q_2 \tag{8}$$

$$\dot{q}_2=-\beta q_2+q_1q_4 \tag{9}$$

$$\dot{q}_4=\varepsilon-q_4-q_1q_2 \tag{10}$$

と書くことができる．ここで，変数の上に付いたドットは時間 τ の微分を意味する．

第3図 (上) の $R>R_1$ の領域では定常なロール解 (ロールケーキのような x，z だけの関数の対流解) となる．定常解の有限振幅の議論は木村 (1983) を参照のこと．定常解はバーをつけた量として $\bar{q}_1$，$\bar{q}_2$，$\bar{q}_4$ で表すと，これらは



第３図　（上）横軸を R としたときの概念的な運動の形態．（下）流体を横から見た室内実験（Farhadieh and Tankin 1974）．シュリーレン法（密度変化をみる室内実験の可視化テクニック）でみた流体の密度分布．$R<R_1$では，密度が水平一様に分布しているので，運動はない熱伝導解を表す．$R_1<R<R_2$では，対流の上昇流域では軽い密度が上に移流され，下降流域では重い密度が下に移流されるので，水平に波打つパターンが見られる．

$$\bar{q}_1=\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha}(\varepsilon-\alpha\beta)},\ \bar{q}_2=\pm\sqrt{\alpha(\varepsilon-\alpha\beta)},$$
$$\bar{q}_4=\alpha\beta \tag{11}$$

となる．しかし，定常解がどの程度まで安定であるかはその安定性を議論しなければならない．Lorenz（1963）は，定常解と擾乱部分を式(8)〜式(10)に代入して，擾乱部分の振幅は小さいとして擾乱部分に関する線型式を導いた．その結果，

$$\varepsilon=\alpha^2\beta\,\frac{\alpha+3\beta+1}{\alpha-\beta-1}\left[=\frac{rP}{b^2}=\frac{RP}{R_1b^2}\right] \tag{12}$$

を満たす R を R_2とすると，$R_1<R<R_2$の範囲で定常解が安定であることが分かった．ここで，$a_1≒2.22$（$b=8/3$），プラントル数 P を10とすると，r_2（$=R_2/R_1$）は24.7である．

では $R>R_2$の領域では対流解はどのような振舞いをするのか．その領域の例として，Lorenz（1963）は $r=28$の場合について数値計算を行った．初期値として静止解に近い値を与えると，しばらくはある周期である一定値の周りを時間変動するが，時間とともに第１図（下）のように別の領域にジャンプする不思議な挙動が見られた．これがローレンツ・カオスと呼ばれるものである．

３．別の視点－保存量からの見方

前章まではローレンツ・カオスの通常の導出法を説明した．これから，パラメータ r が r_2より大きいときにカオス解となることは理解できた．しかし，軌道の二重構造やジャンプのタイミング等に関して，その理由まではわからない．そこで本章では，別の見方として保存量を使った見方を紹介する．以下は Haken（1978）からの引用である．

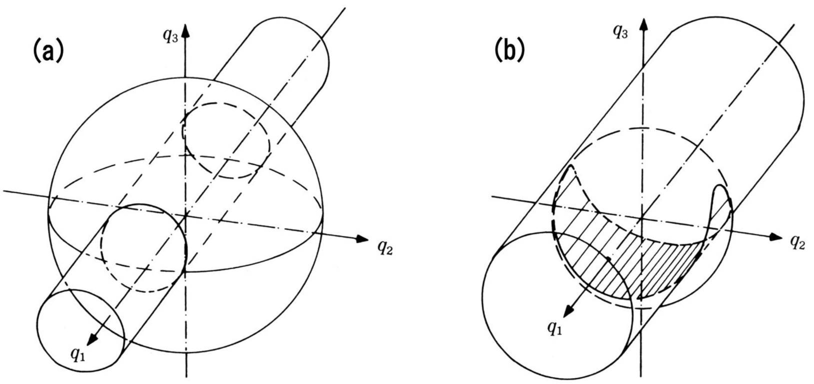
式(8)〜式(10)から出発して，右辺の項を二つのグループに分ける．第一のグループは，右辺最終項の（q_2，q_1q_4，$-q_1q_2$）である．元を辿れば，こうした項は粘性，熱伝導，強制項には無関係であり，そのようなときには保存量が存在する．$q_4=q_3-1$とおくと，エネルギー保存と熱保存の二つの保存量があり，これらの保存量は，

$$\Omega^2=q_1{}^2+q_2{}^2+q_3{}^2 \tag{13}$$

$$\rho^2=q_2{}^2+(q_3-1)^2 \tag{14}$$

と書くことができる．（q_1，q_2，q_3）の空間では，式(13)は中心（0，0，0）で半径 Ω をもつ球，式(14)は中心（0，0，1）で半径 ρ をもつ円柱を表す．ある初期条件を与えると，球と円柱のそれぞれの半径が与えられる．ここで，（q_1，q_2，q_3）の軌道は二つの保存量を満たすために，二つの物体の交点上になければならない．これから，球と円柱の半径の大きさによって，軌道には二つの可能性があることになる．一つは，第４図ａのように $\Omega>1+\rho$ の場合であり，二つの分離した軌道である．二つは，第４図ｂのように $\Omega<1+\rho$ の場合であり，二つの領域を行き来できる軌道である．この場合保存量が保たれるので，初期条件が一旦決まればいずれかの軌道となる．

もともとの式(8)〜式(10)の系には第２のグループが残っている．残りの項（$-\alpha q_1$，$-\beta q_2$，$\varepsilon-q_4$）は，粘性，熱伝導，強制項に関する項であり，系内の運動を非保存的に変動させることができる．つまり，これらの項があるために，（q_1，q_2，q_3）空間における球と円柱の半径は時間とともに変わってゆく．第４図ａ



第4図　(a) $\Omega > 1 + \rho$ の場合の，球と円柱との交差線．二つの分離した軌跡ができる．(b) $\Omega < 1 + \rho$ の場合の，球と円柱との交差線．一つの閉じた軌跡になる．Haken (1978；牧島・小森訳 1980) から引用．

の状態にあるときは空間の一領域内を旋回するが，第4図bの状態になると別の領域へジャンプすることになる．そのジャンプはその跳躍の条件が満たされるときに起こり，またそれがどこに位置するかに敏感に依存する．これから，第1図の軌道で無秩序に見えたジャンプは，第4図から眺めると，aとbとの間の軌道のジャンプであることがわかる．したがって，ローレンツ・カオスの発生には，系内に保存的な項と非保存的な項が共存するのが必要である．こうした事情が理解できれば，第1図（下）の軌道の二重構造やジャンプのタイミングなどは直感的に理解できる．また r の大きさを r_2 から多少変えても，解の二重構造は変わらないことも予想がつく．

ちなみに Haken (1978) は，Lorenz (1963) が導出した方程式系 (8)～(10) がレーザー物理学に現れるものと等価であると述べている．このことは，ローレンツ・カオスは気象学だけにとどまらず様々な分野に適用できる汎用性をもった系であることを意味する．ローレンツ・カオスがこれだけ多くの人を引きつけるのは，単に解の軌道が特異なためばかりではないのである．

4．まとめ

ローレンツ・カオスはもともと気象でなじみの対流をもとにした議論なので，対流の方程式系の導出からローレンツ・カオスの発現までを簡単にレビューした．次に，そこに現れる軌道の二重構造や軌道間のジャンプの発生理由を直観的に理解するために，方程式系が持つ保存量と非保存量に着目して議論した．ローレンツ・カオスはこのような別の視点があるおかげで，解の不思議な振舞いが深く理解できたと思われる．

謝　辞

藤部文昭「天気」編集委員長には貴重なコメントを頂いた．感謝します．

参　考　文　献

Bénard, H., 1900: Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. Rev. Gén. Sci. Pures Appl., **11**, 1261–1271, 1309–1328.

Farhadieh, R. and R. S. Tankin, 1974: Interferometric study of two-dimensional Benard convection cells. J. Fluid Mech., **66**, 739–752.

Gleick, J., 1987: Chaos—Making a New Science. Penguin Books, 352pp.（上田睆亮 監修，大貫昌子 訳，1991：カオス—新しい科学をつくる．新潮文庫，538 pp.）

Haken, H., 1978: Synergetics—An Introduction. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 355pp.（牧島邦夫，小森尚志 訳，1980：協同現象の数理．東海大学出版会，409pp.）

木村龍治，1983：地球流体力学入門．東京堂出版，247 pp.

Lorenz, E. N., 1963: Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci., **20**, 130–141.

Rayleigh, L., 1916: On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. Phil. Mag., Ser.6, **32**, 529–546.