

三次八面体逡減ガウス格子

榎本 剛*

「三次八面体逡減ガウス格子」(cubic octahedral reduced Gaussian grid) は欧州中期予報センター (ECMWF) の全球数値予報モデル IFS (Integrated Forecast System) が Cycle 41r2 (2016年3月8日現業化) で採用した格子系である (ECMWF 2016). 本稿では, この格子に関連して, ガウス緯度, IFS を含むスペクトル変換法モデル (以下スペクトルモデル) の解像度と格子数との関係について説明し, ECMWF の新しい格子系がどのようなものか紹介する.

1. ガウス緯度

スペクトルモデルでは, 格子で水平離散化する代わりに変数を球面調和関数で展開しているが, 物理過程などを計算する格子は, 緯度経度座標に基づいている. 格子の間隔は経度方向には一様だが, 緯度方向には極に近づくほど若干狭くなっている. この配置は, 緯度方向の積分を行う際にガウス・ルジャンドルの求積法を用いているためである. 格子点の緯度方向の位置は, ガウス緯度と呼ばれ, ルジャンドル多項式 $P_J(\mu)$ の J 個の 0 点で与えられる (第 1 図). ここで ϕ は緯度を表し, $\mu = \sin\phi$ である. $2J - 1$ 次以下の多項式で表される関数 $f(\mu)$ に対する積分は, ガウス緯度に対して求まるガウス重み w_j を用いた和

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu = \sum_{j=1}^J f(\mu_j) w_j$$

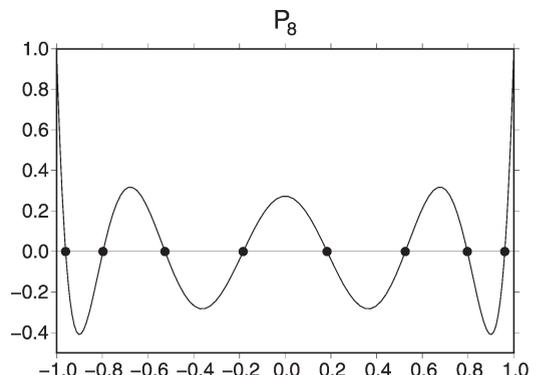
で厳密に求めることができる. データ解析でも, ガウス重みは有用である. 例えば再解析のモデル格子デー

タのようなガウス緯度で与えられたデータを領域平均する際は, 緯度による異なる面積因子としてかけておく必要がある.

2. スペクトルモデルの解像度

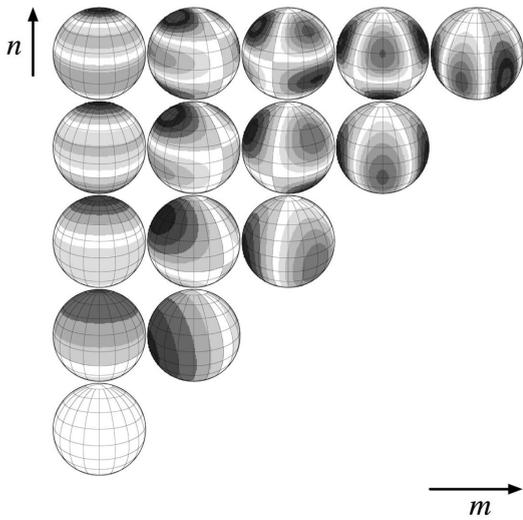
緯度経度座標は, 極に子午線が収斂するため東西格子間隔が短くなる. 極付近での格子点の密集 (極問題) を指して, スペクトルモデルの格子は準一様ではなく, 非効率であるとされることがある. この指摘には誤解が含まれていることを改めて指摘しておきたい. スペクトルモデルは東西波数と全波数 (東西波数 + 南北波数) を同じ波数で切断することにより, どのような回転に対しても展開係数が不変となるので解像度は (準一様ではなく完全に) 一様である. すなわち, 時間積分の刻み幅 (タイムステップ) は極付近の東西格子間隔に左右されない.

球面調和関数は, どのように一様な解像度を実現しているのだろうか. 第 2 図に示す球面調和関数は右に行くほど東西波数 m が大きく, 上に行くほど全波数



第 1 図 ルジャンドル多項式 P_8 とその 0 点. 横軸は $\sin(\text{緯度})$.

* Takeshi ENOMOTO, 京都大学防災研究所.
enomoto.takeshi.3n@kyoto-u.ac.jp



第2図 Y_0^0 から Y_4^4 までの球面調和函数.

n が大きくなるように並べられている。左端 $m = 0$ は帯状 (zonal), 斜め ($m = n$) は扇形 (sectional), それ以外 ($m \neq 0, m \neq n$) は細片状 (tesseral) と呼ばれる。この図から、南北波数が小さくなるほど振幅が低緯度に局在化しており、南北波数0である扇形は赤道で振幅が最大で極で0になっていることが分かる。

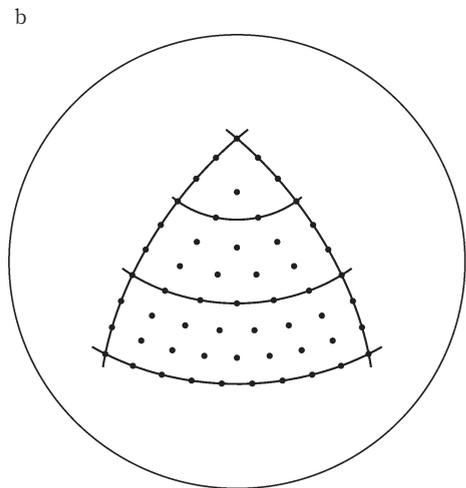
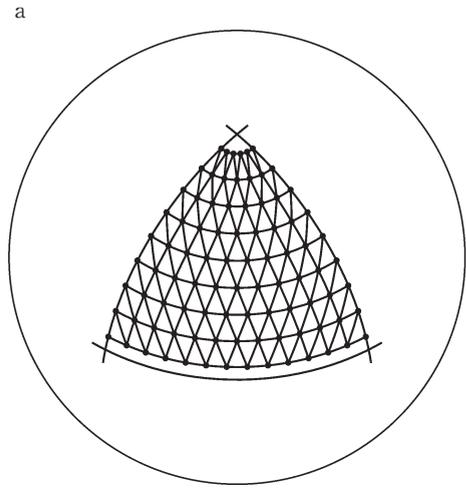
さて、スペクトルモデルの解像度は、T213のように切断波数で表される。213の前のTは、上述の解像度が一樣になるような三角切断 (triangular truncation) を示している。与えられた切断波数に対して、エイリアシングを生じないように格子数を決める。エイリアシングとは、格子数の不足により高波数が低波数に投影される現象である。2次の非線型項がエイリアシングを生じないようにするには、 N を切断波数、 I を東西格子数として

$$I \geq 3N + 1$$

となるようにする。東西方向には高速フーリエ変換 (FFT) が用いられるので、FFTの基数を考慮した最小の I が選択される。このような非線型項を考慮した格子を二次格子 (quadratic grid) と呼ぶ。

3. セミ・ラグランジュ移流

オイラー移流よりも長いタイムステップを用いることが可能なセミ・ラグランジュ移流は、ECMWFでは1991年 (Ritchie 1991), 気象庁では2005年 (松村



第3図 a. 三次八面体通減ガウス格子. b. Kurihara (1965) 格子.

2000), 米国環境予測センター (NCEP) では2015年から採用されている (NCEP 2015). オイラー移流では各格子点で非線型の移流項を計算するが、古典的なセミ・ラグランジュ移流では毎時刻格子点に到達する流体粒子の位置 (上流点) を探索し、内挿で得られた前時刻の上流点での値を新たな時刻での値とする。セミ・ラグランジュ移流では、移流項は時間微分の中に隠れてしまい移流項が陽に現れないことから、東西格子数を

$$I \geq 2N + 1$$

とできる。これを線型格子 (linear grid) という。ECMWFでは、1998年に線型格子を採用した。線型

格子という名称は南北に等間隔であることを連想させるが、線型項のみを考慮した格子という意味で、不等間隔であるガウス緯度を用いることは変わらない。

ECMWF が採用した三次格子 (cubic grid, 第3図 a) は、線型格子とは逆に

$$I \geq 4N + 1$$

となるように切断波数に対して格子数を多く取る。三次格子を採用した Cycle 41r2 では、切断波数1279はそのままにし、格子空間での解像度を約16 km から約8 km に向上させている。同じ格子数に対して切断波数が小さくなるので、ルジャンドル変換に伴う計算負荷は小さくなる。格子を増やす理由として、解像度が高くなると、物理過程などからの非線型性が高まり、エイリアシングが生じるためであると説明されている (Malardel *et al.* 2015)。

4. 逡減格子

さて、上に述べたように、セミ・ラグランジュ移流では、非線型項が見かけ上現れないので、タイムステップは最小格子間隔の影響を受けない (Côté and Staniforth 1988)。しかしながら、上3機関のモデルでは、極に近づくほど東西格子数を減らす逡減格子 (reduced grid) が用いられている。逡減格子も準一様格子の一つであるが、セミ・ラグランジュ移流を用いた場合は、極問題の回避が目的ではなく、一様性を高めて物理過程で生じる潜在的な数値不安定を避けるとともに、格子点数を減らして計算量を削減することが目的である。

これまでは FFT の基数を考慮して、なるべく一様になるように極に近づくほど東西格子数を削減していた (Hortal and Simmons 1991)。八面体格子では、極に一番近い緯度円の番号を j として

$$I(j) = 4 \times j + 16$$

のように赤道に向かって4点ずつ増やしていく。一見目新しそうだが、八面体を再分割した格子系は新しいものではない。Kurihara (1965) 格子 (第3図 b) の特別な場合と考えることができる。

三次格子と八面体格子とは独立に採用できるが、こ

れらを組み合わせたものが三次八面体格子である。八面体格子は、八面体の正三角形の面を再分割したもので、整然と三角形の体積素を並べたものとみなすことができる。ただし、赤道上に格子点のないガウス緯度を用いているため、赤道上の体積素は四角形となる。ECMWF は、有限体積法をこの格子に適用した次世代モデルを開発した (Smolarkiewicz *et al.* 2015)。格子系が同じであるため、スペクトル変換法を用いた既存のモデルとの比較が容易である。三次八面体逡減ガウス格子への変更は、既存のモデルを置き換えるための布石であると思われる。

参考文献

- Côté, J. and A. Staniforth, 1988: A two-time-level semi-Lagrangian semi-implicit scheme for spectral models. *Mon. Wea. Rev.*, **116**, 2003-2012.
- ECMWF, 2016: Implementation of IFS Cycle 41r2. <https://software.ecmwf.int/wiki/display/FCST/Implementation+of+IFS+cycle+41r2> (2016.10.12 閲覧)。
- Hortal, M. and A. J. Simmons, 1991: Use of reduced Gaussian grids in spectral models. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 1057-1074.
- Kurihara, Y., 1965: Numerical integration of the primitive equations on a spherical grid. *Mon. Wea. Rev.*, **93**, 399-415.
- Malardel, S., N. Wedi, W. Deconinck, M. Diamantakis, C. Kühnlein, G. Mozdzynski, M. Hamrud and P. Smolarkiewicz, 2015: A new grid for the IFS. *ECMWF Newsl.*, (146), 23-27.
- 松村崇行, 2000: セミラグランジュ法。全球モデル開発の現状と展望—気象業務の基幹モデルとして—, 数値予報課報告・別冊第46号, 気象庁, 67-84.
- NCEP, 2015: Technical Implementation Notice 14-46. http://www.nws.noaa.gov/om/notification/tin14-46_gfs.htm (2016.12.22 閲覧)。
- Ritchie, H., 1991: Application of the semi-Lagrangian method to a multilevel spectral primitive-equations model. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **117**, 91-106.
- Smolarkiewicz, P., W. Deconinck, M. Hamrud, C. Kühnlein, G. Mozdzynski, J. Szmelter and N. Wedi, 2015: An all-scale, finite-volume module for the IFS. *ECMWF Newsl.*, (145), 24-29.