

流体運動に見られる共振現象とは？

吉 崎 正 憲*・鈴木パーカー明日香**

1. はじめに

共振現象(後述)は様々な分野で散見される。力学の振り子(第2章)やばね振動の運動ではポピュラーであるが、電磁気学では、ラジオのチューナーの振動数を変えるとき、ザーザーという雑音だったのが急にボリューム一杯の音声が開こえたりする。また化学の塩化水素の分子 HCl に電磁波を入射する実験(寺沢 1984)では、電磁波の振動数が HCl の固有振動数(～赤外線領域)に近くなると H は激しく振動し電磁波の透過率は最小になる。生物では、アカイエカのオスの触角に多数の毛が生えているが、メスが近くを飛ぶときの羽音に感度よく反応できると言われている(小暮 1996)。これらはすべて共振現象である。共振により振動エネルギーが大きくなり、際立ってくるのである。

流体運動で、例えば、安定成層をした流体中で一つの振動数の強制を与えて特定の波数をもつ波動(内部重力波)が発現する(後述)。このような場合でも、上記の共振現象と同じことが起こったと思うのは飛躍しすぎだろうか。

一般に流体内で観測される波を空間と時間に関する式で記述し、それを波数と振動数によって表現すると、分散関係(後述)が得られる。ところが分散関係は強制項がないときに現れる(このときの解を自由解と呼ぶ)。もし流体中で強制を与えて発現させる波動が「流体の共振現象」であるとする、自由解の分散

関係と強制による共振現象とはどういう関係になるのだろうか。

強制振動がある場合の一般論として、振動系が持つ固有振動数を ω_n 、強制項の角振動数(以下「振動数」と表記)を ω_f とすると、 $\omega_n \neq \omega_f$ の場合、解の振幅は自由解と同じで時間的に一定である。ところが、 $\omega_f = \omega_n$ のとき、解の振幅は時間に比例して大きくなる。物理学では、 $\omega_n = \omega_f$ の場合に振動系の振幅が大きくなる現象を「共振」(あるいは共鳴)と呼ぶ。

本稿では、まず振り子を例に、強制項を含む場合を取り上げ、共振現象について述べる。次に安定成層中にみられる内部重力波について、強制振動を与える場合を眺めてみる。こうして、分散関係を満たす自由解が共振する解(共振解)と一致することを見てみよう。

2. 振り子の共振

まず振り子を使ったマジックを考えよう(吉田 2000)。同じ質量のおもりと異なる長さ l_n ($n = 1, 2, 3$) のひもを準備し、それを棒にくくり付けて振り子を三組作る。ここで、棒の両端を両手で持ち、同じ向きに棒をある振動数で振動させる(第1図)。マジックでは、観客に一つの振り子を指させてその振幅を大きく振ってみせる趣向である。こうした実験は、例えば、NHK for school の番組「大科学実験」の「ひとつだけ動かして！」で見ることができる。

振り子を振動数 ω_f で強制したときの方程式は、振動方向の原点からの変位を η_n 、時間を t 、強制の振幅の大きさを F^* とすると、振幅が微小のときに次式で表される。

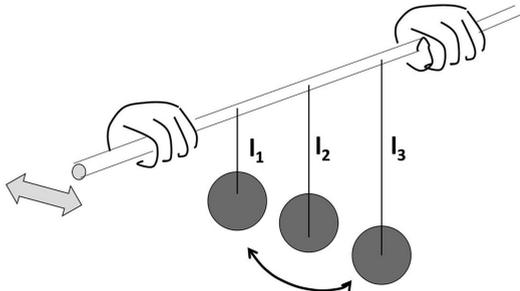
$$\frac{d^2\eta_n}{dt^2} + \omega_n^2\eta_n = F^*\cos(\omega_f t) \quad (1)$$

* (連絡責任著者) Masanori YOSHIKAZI, 立正大学地球環境科学部環境システム学科。

yoshizaki@ris.ac.jp

** Asuka Parker SUZUKI, 立正大学地球環境科学部環境システム学科。

© 2018 日本気象学会



第1図 異なる長さ l_n ($n=1, 2, 3$) のひもを棒にくくり付けて作った三つの振り子。振り子を支える棒の両端を両手で持ち、同じ向きにある一定の振動数で振り子を振動させる。

$$\omega_n^2 = \frac{g}{l_n} \quad (2)$$

ここで、 ω_n は振り子の固有振動数であり、ひもの長さ l_n と重力加速度の大きさ g で表される。

$F^* = 0$ のときの式 (1) の解は、

$$\eta_n = A \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t) \quad (3)$$

であり、係数 A と B は未定定数で初期値を与えればすべて決まる (以下に出てくる D, E, G, H も同様)。この場合、解は時間振動するだけで振幅は時間的に変わらない。

$F^* \neq 0$ の場合には解は二つに分かれる。 $\omega_n \neq \omega_f$ の場合は、

$$\eta_n = D \sin(\omega_n t) + E \cos(\omega_n t) + \frac{F^*}{\omega_n^2 - \omega_f^2} \cos(\omega_f t) \quad (4)$$

であり、右辺の第1項と第2項は自由解、第3項は強制解と呼ばれる。式 (3) と同様に、この解の振幅も時間的に変わらない。

注目すべきは、 $\omega_n = \omega_f$ の場合である。このとき式 (4) のままでは右辺第3項の分母は0となり不定となる。そこで、自由解のうち右辺第2項の一部を取り入れて、右辺第3項を

$$\frac{F^*}{\omega_n^2 - \omega_f^2} [\cos(\omega_n t) \{ \cos(\Delta \omega t) - 1 \} - \sin(\omega_n t) \sin(\Delta \omega t)] \quad (5)$$

と書き換え、これを改めて強制項と呼ぶ。 $\omega_f = \omega_n +$

$\Delta \omega$ と書き換え、 $\Delta \omega$ を0に近づけると、式 (5) は形式上 $0/0$ の形になる。式 (5) は

$$\frac{F^*}{\omega_n^2 - \omega_f^2} [\cos(\omega_f t) - \cos(\omega_n t)] \quad (6)$$

と変形することができる。 $\Delta \omega$ が小さいとき、(6) の分母は $-2 \omega_n \Delta \omega$ と近似できる。また [] 内の2項のうち、第1項は $O(\Delta \omega^2)$ のオーダー、第2項は $O(\Delta \omega)$ のオーダーとなることから、式 (6) は

$$\frac{F^* t \sin(\omega_n t)}{2 \omega_n} \quad (7)$$

と書くことができる。ここで、 $\Delta \omega$ が0に近づくと

$$\lim_{\Delta \omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta \omega)}{\Delta \omega} = 1$$

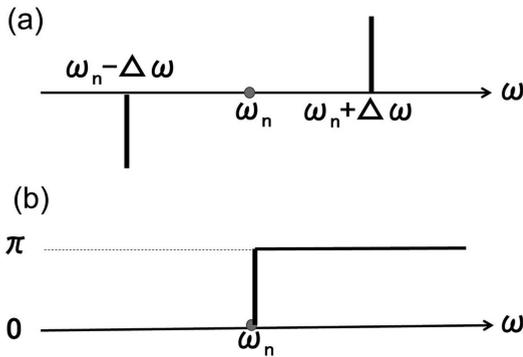
となる公式を利用した。また式 (7) には式 (5) の自由解 ($\cos \omega_n t$) は関与していないことに注意する。

式 (6) の [] 内の第2項について別の見方ができる。これを

$$\frac{F^*}{2(\omega_n^2 - \omega_f^2)} [\cos\{(\omega_n + \Delta \omega)t\} - \cos\{(\omega_n - \Delta \omega)t\}] \quad (8)$$

と変形すると、この強制項は $\omega_n + \Delta \omega$ と $\omega_n - \Delta \omega$ の二つの振動数を持ちそれぞれの振幅の符号は逆ということである。第2図 a に ω 軸における強制の強さ、第2図 b に強制される振動数 ω_n のまわりの波動の位相を表す。位相に関して、例えば、ばね振動である一定の振動数の強制を与えると、固有振動数より小さい振動数で強制するとばねは同じ方向 (in phase) に振動するが、固有振動数より大きい振動数で強制するときにはばねは反対方向に振動する。これから、 ω_n を挟んで、 $\omega_n - \Delta \omega$ はマイナス、 $\omega_n + \Delta \omega$ はプラスの強制を与えると (第2図 a)、 $\omega_n - \Delta \omega$ の強制は振り子をマイナス方向に強制し、 $\omega_n + \Delta \omega$ も振り子をマイナス方向に強制することになる。こうしたことは、固有振動数 ω_n のまわりでしか起こらない。つまり、 ω_n 付近における強制は、両脇で位相が 180° ずれることにより、 $\omega_n - \Delta \omega$ と同じ方向に振り子を強制することになる。その表れが時間項に比例する形になると解釈できる。

こうして $\omega_n = \omega_f$ のときの全体の解は、



第2図 振動数 ω 軸における (a) $\omega_n + \Delta\omega$ と $\omega_n - \Delta\omega$ の強制項の振幅と (b) 位相。

$$\eta_n = G \sin(\omega_n t) + H \cos(\omega_n t) + \frac{F^* t}{2\omega_n} \sin(\omega_n t) \quad (9)$$

となる。右辺の第1項と第2項は式(4)と同じ自由解であり振幅は時間的に一定であるが、第3項の強制項は時間に比例して振幅は大きくなる。つまり、強制振動によって与えられるエネルギーは時間の2乗に比例して大きくなる。第1図のマジックは振り子が共振する性質を利用したものである。だから、マジシャンは振り子の固有振動数をあらかじめ知っておく必要がある。

3. 安定度が一定の成層流体中の内部重力波の強制運動

安定度 N の成層中では内部重力波が発現する。ここで、 N は浮力振動数 (プラントバイサラ振動数) であり、

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \quad (10)$$

と定義され、今後正值の定数とする。ここで、 ρ は流体の密度、 z は鉛直方向の座標、バーは水平平均した量を表す。支配方程式は、水平風を u 、鉛直流を w 、圧力に関する量を ϕ 、浮力を b 、水平方向の座標を x 、時間を t とすると、付録Aに示される。強制項のないときの (x, z, t) の物理空間における内部重力波の支配方程式は、例えば、浮力 $b(x, z, t)$ については、

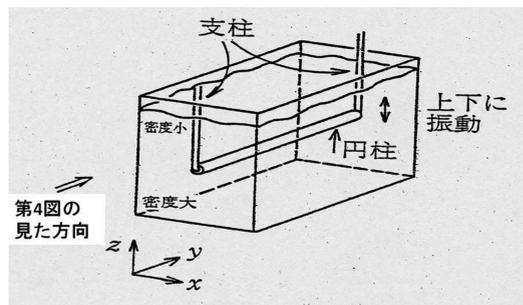
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] b = 0 \quad (11)$$

とまとめられる。式(11)の解を $B(k, m, \omega_0) \exp\{i(kx + mz - \omega_0 t)\}$ と置き、 $B \neq 0$ とすると、(A7)より

$$\frac{\omega_0^2}{N^2} = \frac{k^2}{k^2 + m^2} = \cos^2 \alpha \quad (12)$$

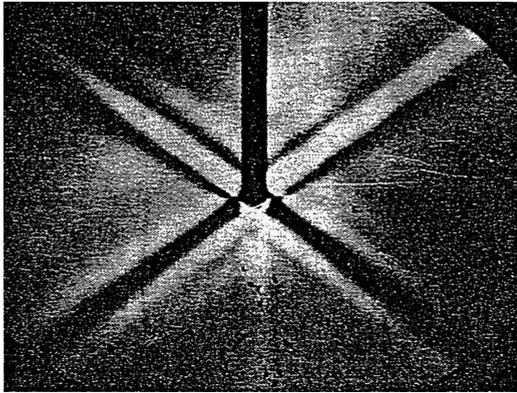
が得られ、これが内部重力波の分散関係である。ここで、 i は虚数単位 ($i^2 = -1$)、 k は水平波数、 m は鉛直波数、 ω は振動数である。式(12)から、例えば、 (k, m) の組み合わせを一つ選ぶとたくさんの ω の中から特定の ω_0 が選択される。

Mowbray and Rarity (1967) や酒井 (1990) は、安定成層の流体中に円柱を上下に振らせて内部重力波を発生させた[†]、第3図は実験の概要、また第4図は $\omega_0/N = 0.7$ としたときに現れる内部重力波のスナップショットである (Mowbray and Rarity 1967)。振動の中心から外側に発する線状の縞が内部重力波の波面であり、波動は濃度の濃淡として表される。その波面の時間変化を見ると、第1象限では左上から右下へ波面が動く (第5図a)。ほかの象限は第1象限と鏡像関係にある。この実験では角振動数と円柱サイズのスケール ($\sim \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_z^2}$, λ_x, λ_z は x, z 方向の波長) を与えることで、角度 α つまり式(12)の分散関係が目に見える形で現れる。

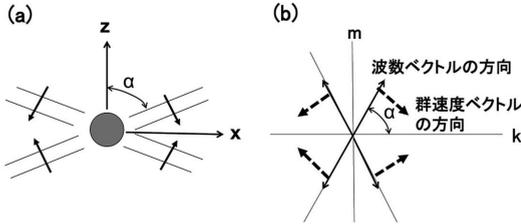


第3図 一定の安定度 N を持つ安定成層の流体中で、支柱に支えられた円柱を上下に振動して内部重力波を発生させる装置。

[†] 内部重力波の室内実験は、電腦倶楽部基礎実験集第2集で見ることができる。
https://www.gfd-dennou.org/library/gfd_exp/exp_j/exp/iw/index.htm



第4図 $\omega/N=0.7$ のときのシュリーレン法によって可視化された波に伴う密度変化の様子 (Mowbray and Rarity 1967).



第5図 (a) 物理空間で見た内部重力波の波面の時間変動。矢印方向に波面が動く。波面の z 軸からの角度を α とする。(b) 波数空間で見た内部重力波の波数ベクトル (実線) と群速度ベクトル (破線) の方向。

波動を物理空間ではなく波数空間で表現すると、第5図bのようになる。波数ベクトルを $\vec{K} (k, m)$ ($k = 2\pi/\lambda_x, m = 2\pi/\lambda_z$) として、群速度ベクトル (c_{gx}, c_{gz}) を計算することができ (式 (A8) と (A9) 参照)、二つのベクトルは直交関係にあることが分かる。また群速度と流体粒子の運動は平行であることから、結局、流体粒子の運動は波数ベクトルと直交し波面に平行となる。以上のことから、物理空間の第1, 2, 3, 4象限は波数空間の第4, 3, 2, 1象限に対応することが分かる。

ここで問題は、一つの振動数を強制すると特定の波数のじょう乱が見えることである。本来であれば多くの波数が同時に励起されるはずなのに、その中で特定の波数だけが大きな振幅となって目の前に表れる。これからこの理由を明らかにする。

浮力の強制項 f_b だけを与えた場合、浮力 b に関する支配方程式は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] b = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial f_b}{\partial t} \tag{13}$$

となる (A5)。第5図aの第1象限で見られた高さ方向から角度 α に傾く波面に着目して、その波面方向を z' 、それに直交する方向を x' 、 x' 方向の波数を K' ($= (k'^2 + m'^2)^{1/2}$) とし、波面は x' 方向に c_0 の大きさで動くものとする (第6図a)。ここで、 $c_0 = \omega_0 / K'$ と定義すると、振動数 ω_0 は式 (12) の分散関係を満たす。波数ベクトルでみると、 $k' = K' \cos \alpha$ 、 $m' = K' \sin \alpha$ という関係である。また波面と一緒に動く系 $\xi = x' - c_0 t$ を用いると、 $\exp(iK'\xi)$ を持つ波動は時間的に動かない波板に相当する。

これから強制項 f_b をフーリエ変換した量を F 、浮力をフーリエ変換した量を B_f とする。強制項がない場合 ($F = 0$)、自由解 B_f は

$$B_f = C e^{iK'\xi} \tag{14}$$

と表される。ここでは第2章と違い複素数を用いて表す。 C は複素数の定数である。

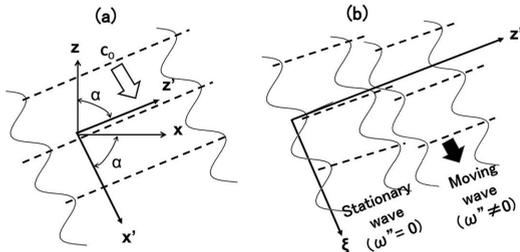
強制項があるときについては、強制解だけに着目する。強制解ではさまざまな波数と振動数が選べるから、 f_b の形を $\exp\{i(K''\xi + m''z' - \omega''\tau)\}$ ($K'' = K' + \Delta K$ と m'' は波数、 ω'' は振動数。なお $\Delta K = m'' = \omega'' = 0$ のときは自由解を表す) とすると、強制解 B' は以下のようなになる (詳しい導出は付録Bを参照)。

$$\begin{aligned} & \{(c_0 K'' + \omega'')^2 (K''^2 + m''^2) \\ & - N^2 (K'' \cos \alpha + m'' \sin \alpha)^2\} B' \\ & = i(c_0 K'' + \omega'') (K''^2 + m''^2) F' \end{aligned} \tag{15}$$

$\Delta K = m'' = \omega'' = 0$ 以外の場合、即ちこの3者の内少なくともどれか1つが0でない場合は、 B' の係数は0でなく、 B' は有限値となる。つまり、振幅は時間に関して一定となる。

そのうち、特に $K'' = K'$ 、 $m'' = 0$ として ω'' だけが変わる場合を考える (第6図b)。このときの強制解は

$$B' = \frac{i(c_0 K' + \omega'') F'}{(c_0 K' + \omega'')^2 - N^2 \cos^2 \alpha} \tag{16}$$



第6図 (a) z 方向から角度 α 傾いて位相速度 c_0 (白抜きベクトル) で動く波動。波動の山を破線、それに沿う方向を z' 、それに直交する方向を x' とする。(b) (ξ, z') から見た動かない波動 (左) と、 $K''=K'$ 、 $m''=0$ 、 $\omega'' \neq 0$ のときの動く波動 (黒いベクトル, 右)。

と表される。 $\omega'' \neq 0$ の場合、式 (16) の右辺の分母は 0 ではなく B' は有限値である。 ξ 系で見ると、 $\omega'' \neq 0$ の解は動く波板による強制を表し、動く波板の強制は動かない波動 (= 分散関係を満たす解) には有効に働かず、強制される波動の振幅は時間的に一定となる。

それに対して、 $\omega'' = 0$ の場合は異なる、このとき式 (12) が成立して、式 (16) の右辺の分母は 0 となる。つまり、このままでは B' は決まらず不定となる。これは振り子の共振の場合と同様である。そこで式 (16) に式 (14) の自由解の一部を加えて

$$B'' = |B'| e^{iK'\xi - i\omega''\tau} - |B'| e^{iK'\xi} \quad (17)$$

と新たな強制解 B'' を作ると、 $\omega'' \rightarrow 0$ のとき B'' は $0/0$ の形となる。これから、時間に比例する振幅を持つ共振解を得ることができる。このとき、 ξ 系では空間的に動かない波板の強制項は動かない波動 (= 分散関係を満たす解) を強制し、その結果、強制のエネルギーは常に波動に注入されて時間とともにその振幅は大きくなる。

Mowbray and Rarity (1967) や酒井 (1990) の室内実験で内部重力波の分散関係を観測できたので、式 (12) の分散関係を満たす自由解が発現したように思われたが、そうではなかった。観測されるのは通常振幅が大きい波動であるから、室内実験でじょう乱として目立つのは自由解ではなく強制解 (つまり、共振解) の方であった。ただ、そのときの強制解の構造が“たまたま”自由解の構造と同じであったから、自由解の分散関係を共通に持つことができたのである。共

振解が選ばれるので、例えば、特定の角振動数について特定の波数となるのは納得がゆくことである。

4. 結論

第2章の振り子と第3章の内部重力波における共振現象について議論した。両者とも、固有振動数 ω_0 を持つ振動系で強制振動数 ω_f の強制を与えるものであった。 $\omega_f = \omega_0$ のとき、固有振動数の分散関係を満たし有限な振幅を持つ自由解とともに、振幅が時間に比例して大きくなる共振解がある。共振解の振幅は時間的に大きくなるため、室内実験では共振解の方が現れることになる。ただそのときの構造が自由解と一致するために、自由解とみなしてもよいのである。結局、強制があってもなくても流体の運動は分散関係を満たすことから、ここで特段新しいことを述べたわけではない。

大気では、音波、ロスビー波、赤道波など多くの波動が観測されるが、以上の類推から、これらも共振現象であると予想される。自然界には様々な波動源が存在するが、我々が波動として感知できるのは、大気の固有振動数とハーモニーを起こした結果であり、大きな振幅となるからである。

ここで流体の共振現象のエッセンスを理解するには、第2章であげた「振り子のマジック」の理屈を理解すればよいのである。「振り子のマジック」にそのような深遠な物理があったとは、驚くとともに深い感動を覚えてしまう。

参考文献

- 小暮陽三, 1996: 物理の常識 おもしろ知識. 日本実業出版社, 254pp.
- Mowbray, D. E. and B. S. H. Rarity, 1967: A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid. *J. Fluid Mech.*, **28**, 1-16.
- 酒井 敏, 1990: モアレ法による内部重力波の可視化. 可視化情報学会誌, **10**, 203-206.
- 寺沢徳雄, 1984: 振動と波動. 岩波全書, 220pp.
- 吉田 武, 2000: 虚数の情緒 中学生からの全方位独学. 東海大学出版会, 1001pp.

付録A. 成層流体中の内部重力波に関する運動方程式と分散関係

この系における線型化されたじょう乱の支配方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{A1})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} + b \quad (\text{A2})$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -wN^2 + f_b \quad (\text{A3})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A4})$$

となる。ここでは強制項として浮力で与えるとして、 f_b とする。

じょう乱 u , w , ϕ , b から、一つのじょう乱の式、例えば、浮力 b についてまとめると、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] b = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial f_b}{\partial t} \quad (\text{A5})$$

となる。 b と f_b について $\{B(k, m, \omega), F(k, m, \omega)\} \times \exp\{i(kx + mz - \omega t)\}$ とおくことにより、

$$[-\omega^2(k^2 + m^2) + N^2 k^2] B = i\omega(k^2 + m^2) F \quad (\text{A6})$$

が得られる。

$F = 0$ の場合、内部重力波の自由解に関する分散関係は、 $B \neq 0$ から、 B の係数部分が 0 にならないから、

$$\omega_0^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + m^2} \quad (\text{A7})$$

となる。 ω_0 は固有振動数である。

ここで波数ベクトルと群速度ベクトルを $\vec{K} = (k, m)$, $\vec{c}_g = (c_{gx}, c_{gz})$ とおくと、群速度ベクトルは ω_0 をそれぞれ k, m で微分した量で定義されるので、

$$c_{gx} \equiv \frac{\partial \omega_0}{\partial k} = \pm \frac{Nm^2}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \quad (\text{A8})$$

$$c_{gz} \equiv \frac{\partial \omega_0}{\partial m} = \mp \frac{Nkm}{(k^2 + m^2)^{3/2}} \quad (\text{A9})$$

となる。波数ベクトルと群速度ベクトルとの内積を求めると 0 であるから、波数ベクトルと群速度ベクトルは直交することが分かる。

付録 B. ξ 系における方程式の変形

第 6 図 a の第 1 象限で見られるような波面に着目して、波面は高さ方向から角度 α に傾いているとする。波面の方向を z' 、それに直交する方向を x' とし、波面は x' 方向に c_0 の大きさで動くものとする。新座標系 (x', z') と旧座標系 (x, z) との変換は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

となる。また新座標系での速度成分 (u', w') と旧座標系での速度成分 (u, w) との変換も同様である。さらに c_0 で動く座標を $\xi = x' - c_0 t$ と定義して、新座標を $\xi = x' - c_0 t = x \cos\alpha - z \sin\alpha - c_0 t$, $z' = x \sin\alpha + z \cos\alpha$, $\tau = t$ と置き換える (第 6 図 b)。こうして、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau} \\ &= \cos\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial z'} \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \tau} \\ &= -\sin\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos\alpha \frac{\partial}{\partial z'} \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} = -c_0 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (\text{B4})$$

の変換を使うことにより、(A1) ~ (A4) は

$$\left[-c_0 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right] u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial \xi} - b' \sin\alpha \quad (\text{B5})$$

$$\left[-c_0 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right] w' = -\frac{\partial \phi'}{\partial z'} + b' \cos\alpha \quad (\text{B6})$$

$$\left[-c_0 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right] b' = N^2 (u' \sin\alpha - w' \cos\alpha) + f_b' \quad (\text{B7})$$

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \quad (\text{B8})$$

と表すことができる。ここでスカラー量は ϕ' , b' , f_b' とした。これから、じょう乱成分 u' , w' , b' , ϕ' および強制項 f_b' を (U', W', B', Φ', f') $\exp\{i$

$(K''\xi + m''z' - \omega''\tau)$ (K'' , m'' は波数, ω'' は角振動数) と与えると,

$$(c_0 K'' + \omega'') U' = K'' \Phi' - i B' \sin \alpha \quad (\text{B9})$$

$$(c_0 K'' + \omega'') W' = m'' \Phi' - i B' \cos \alpha \quad (\text{B10})$$

$$(c_0 K'' + \omega'') B' = i N^2 (U' \sin \alpha - W' \cos \alpha) + i F' \quad (\text{B11})$$

$$K'' U' + m'' W' = 0 \quad (\text{B12})$$

が得られる。これから、例えば、 B' についてまとめると式 (15) が得られる。